1.2 命题公式及其赋值

一、命题变项与合式公式

- 命题变项
- 合式公式
- 合式公式的层次

二、公式的赋值

- 公式赋值
- 公式类型
- 真值表

命题变项

命题常项或命题常元

命题变项或命题变元：取值为1或0的变元（不是命题)

常项与变项均用 $p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i, \ldots,$ 等表示.

合式公式

将命题变项用联结词和圆括号按照一定的逻辑关系联结起来的符号串称作合式公式。

定义1.6 合式公式（简称公式）的递归定义：

(1) 单个命题变项和命题常项是合式公式, 称作原子命题公式

(2) 若A是合式公式，则 $(\neg A)$也是

(3) 若A, B是合式公式，则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是

(4) 只有有限次地应用(1)—(3) 形成的符号串才是合式公式

命题变项与合式公式

几点说明：

1. 对象语言： 描述研究对象的语言，某个具体的公式
例如 $p, p \wedge q, (p \wedge q) \to r$。

2. 元语言：描述对象语言的语言，表示任意的合式公式
例如 A, B。

3. 外层括号可以省去:
$(\neg A)$，$(A \wedge B)$单独出现时，括号可以去掉为 $\neg A$，$A \wedge B$

4. 下列不是公式：$pq \to r$，　$p \to (r \to q$

合式公式的层次

定义1.7

(1) 若公式A是单个命题变项，则称A为0层公式.

(2) 称 A 是 $n+1(n\geq 0)$ 层公式是指下面情况之一:

(a) $A=\neg B$, B 是 n 层公式;

(b) $A=B\wedge C$, 其中B,C 分别为 i 层和 j 层公式，且$n=\max(i,j)$;

(c) $A=B\vee C$, 其中 B,C 的层次及 n 同(*b*);

(d) $A=B\rightarrow C$, 其中B,C 的层次及 n 同(*b*);

(e) $A=B\leftrightarrow C$, 其中B,C 的层次及 n 同(*b*).

(3) 若公式A的层次为k, 则称A为k层公式.

合式公式的层次

例如 公式

$A=p$,

$B=\neg p$,

$C=\neg p\rightarrow q$,

$D=\neg(p\rightarrow q)\leftrightarrow r$,

$E=((\neg p\wedge q)\rightarrow r)\leftrightarrow(\neg r\vee s)$

公式赋值

定义1.8 设$p_1, p_2, \ldots, p_n$是出现在公式A中的全部命题变项, 给$p_1, p_2, \ldots, p_n$各指定一个真值, 称为对A的一个**赋值**或**解释**.

若使A为1, 则称这组值为A的**成真赋值**; 若使A为0, 则称这组值为A的**成假赋值**.

公式赋值

几点说明:

1. A中仅出现 $p_1, p_2, \ldots, p_n$，给A赋值$\alpha=\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$是指

$p_1=\alpha_1, p_2=\alpha_2, \ldots, p_n=\alpha_n$, α_i=0或1, α_i之间不加标点符号

2. A中仅出现 $p, q, r, \ldots$, 给A赋值$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$是指

$p=\alpha_1, q=\alpha_2, r=\alpha_3 \ldots$

3. 含n个命题变项的公式有2^n个赋值.

如 000, 010, 101, 110是$\neg(p\rightarrow q)\leftrightarrow r$的成真赋值，001, 011, 100, 111是成假赋值.

真值表

定义1.9 将命题公式A在所有赋值下取值的情况列成表, 称作A的**真值表**.

构造真值表的步骤:

(1) 找出公式中所含的全部命题变项$p_1, p_2, \ldots, p_n$(若无下角标，则按字母顺序排列), 列出2^n个全部赋值, 从00…0开始, 按二进制加法, 每次加1, 直至11…1为止.

(2) 按从低到高的顺序写出公式的各个层次.

(3) 对每个赋值依次计算各层次的真值, 直到最后计算出公式的真值为止.

真值表的计算

例1: 写出下列公式的真值表, 并求它们的成真赋值和成假赋值:

(1)$(p \vee q) \rightarrow \neg r$

(2)$(q \rightarrow p) \wedge q \rightarrow p$

(3) $\neg(\neg p \vee q) \wedge q$

公式的类型

定义1.10

(1) 若A在它的任何赋值下均为真, 则称A为重言式或永真式;

(2) 若A在它的任何赋值下均为假, 则称A为矛盾式或永假式;

(3) 若A不是矛盾式, 则称A是可满足式.

由例1可知, $(p \vee q) \rightarrow \neg r$, $(q \rightarrow p) \wedge q \rightarrow p$, $\neg(\neg p \vee q) \wedge q$ 分别为非重言式的可满足式, 重言式, 矛盾式.

注意: 1. 可满足式: 至少存在一个成真赋值;

2. 重言式是可满足式, 但反之不真.

真值表的用途

真值表的用途:

1. 求出公式的全部成真赋值与成假赋值,;

2. 判断公式的类型

(1). 若真值表最后一列全为1，则为重言式;

(2). 若真值表最后一列全为0，则为矛盾式;

(3). 若真值表最后一列至少存在一个1，则为可满足式;

真值表的计算

例2: 下列公式中, 哪些具有相同的真值表:

$(1)\ p \to q$

$(2)\ \neg p \vee q$

$(3)\ (\neg p \vee q) \wedge ((p \wedge r) \to p)$

课堂思考题

用真值表判断下面公式的类型

(1) $p \wedge r \wedge \neg(q \rightarrow p)$

(2) $((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)) \vee r$

(3) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow r)$

课后习题

P17:

16(2,4); 17; 18;

19(4,6); 20(4); 21(3).