2.3 联结词的完备集

定义2.6 称$F:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 为n元真值函数.

$\{0,1\}^n=\{00\ldots0, 00\ldots1, \ldots, 11\ldots1\}$，包含 2^n个长为n的0,1符号串.

共有 2^{2^n}个不同的n元真值函数.

一元真值函数

p	$F_0^{(1)}$	$F_1^{(1)}$	$F_2^{(1)}$	$F_3^{(1)}$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

二元真值函数

p	q	$F_0^{(2)}$	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$	$F_3^{(2)}$	$F_4^{(2)}$	$F_5^{(2)}$	$F_6^{(2)}$	$F_7^{(2)}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
p	q	$F_8^{(2)}$	$F_9^{(2)}$	$F_{10}^{(2)}$	$F_{11}^{(2)}$	$F_{12}^{(2)}$	$F_{13}^{(2)}$	$F_{14}^{(2)}$	$F_{15}^{(2)}$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

公式与真值函数

$F_0^{(2)} \Leftrightarrow 0$(矛盾式)　$F_1^{(2)} \Leftrightarrow p \wedge q \Leftrightarrow m_3$　$F_2^{(2)} \Leftrightarrow p \wedge \neg q \Leftrightarrow m_2$

每个真值函数都与唯一的一个主析取范式等值。

任何一个含n个命题变项的命题公式A都对应惟一的一个n元真值函数 F，F 恰好为A的真值表.

等值的公式对应的真值函数相同.

例如：$p \to q, \neg p \vee q$ 都对应 $F_{13}^{(2)}$

联结词完备集

定义2.7 设S是一个联结词集合，如果任何$n(n\geq 1)$ 元真值函数都可以由仅含S中的联结词构成的公式表示，则称S是**联结词完备集**

若S是联结词完备集, 则任何命题公式都可由S中的联结词表示

定理2.6 $S = \{\neg, \wedge, \vee\}$是联结词完备集

联结词完备集

推论 以下都是联结词完备集

(1) $S_1 = \{\neg, \wedge, \vee, \to\}$

(2) $S_2 = \{\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$

(3) $S_3 = \{\neg, \wedge\}$

(4) $S_4 = \{\neg, \vee\}$

(5) $S_5 = \{\neg, \to\}$

注意：$\{\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow\}$不是联结词完备集, 0不能用它表示；

它的子集$\{\wedge\}$,$\{\vee\}$,$\{\to\}$,$\{\leftrightarrow\}$,$\{\wedge,\vee\}$,$\{\wedge,\vee,\to\}$等都不是。

复合联结词

定义2.8 设 p, q 为两个命题, $\neg(p\wedge q)$称作p与q的**与非式**, 记作 $p\uparrow q$, 即 $p\uparrow q \Leftrightarrow \neg(p\wedge q)$, $\uparrow$称为**与非联结词**。

$\neg(p\vee q)$ 称作 p 与 q 的**或非式**, 记作 $p\downarrow q$, 即 $p\downarrow q \Leftrightarrow \neg(p\vee q)$, $\downarrow$称为**或非联结词**

定理2.7 $\{\uparrow\}$、$\{\downarrow\}$都为联结词完备集.

课后习题

P44:

21(2);　　22(1,3);