7.2 二元关系

定义7.3 如果一个集合满足以下条件之一:

(1) 集合非空, 且它的元素都是有序对

(2) 集合是空集

则称该集合为一个**二元关系**, 简称为关系, 记作R.

如果$\langle x,y\rangle \in R$, 可记作xRy; 如果$\langle x,y\rangle \notin R$, 则记作$x \not{R} y$

实例: $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle a,b\rangle\}$, $S=\{\langle 1,2\rangle,a,b\}$.

R是二元关系, 当a, b不是有序对时, S不是二元关系

根据上面的记法, 可以写$1R2$, aRb, a c等.

A到B的关系与A上的关系

定义7.4

设A,B为集合，$A\times B$的任何子集所定义的二元关系叫做**从A到B的二元关系**，当$A=B$时则叫做**A上的二元关系**.

例3 $A=\{0,1\}$, $B=\{1,2,3\}$, 那么

$R_1=\{\langle 0,2\rangle\}$，$R_2=A\times B$，$R_3=\varnothing$，$R_4=\{\langle 0,1\rangle\}$

R_1, R_2, R_3, R_4是从 A 到 B 的二元关系,

R_3 和 R_4 也是A上的二元关系.

计数：$|A|=n$, $|A\times A|=n^2$, $A\times A$的子集有个. 所以 A上有 2^{n^2} 个不同的二元关系.

例如 $|A|=3$，则 A上有=512个不同的二元关系.

A上重要关系的实例

定义7.5 设 A 为集合,

(1) $\varnothing$是A上的关系，称为**空关系**

(2) **全域关系** $E_A = \{<x,y>|\ x \in A \wedge y \in A\} = A \times A$

恒等关系 $I_A = \{<x,x>|\ x \in A\}$

小于等于关系 $L_A = \{<x,y>|\ x,y \in A \wedge x \le y\}$, A为实数子集

整除关系 $D_B = \{<x,y>|\ x,y \in B \wedge x整除y\}$, A为非0整数子集

包含关系 $R_{\subseteq} = \{<x,y>|\ x,y \in A \wedge x \subseteq y\}$, A是集合族.

实例

例如, A={1, 2}, 则

$E_A =$

$I_A =$

例如 A = {1, 2, 3}, B={a, b}, 则

$L_A =$

$D_A =$

例如 $A = P(B) = \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$, 则 A上的包含关系是

$R_{\subseteq} =$

类似的还可以定义:

大于等于关系, 小于关系, 大于关系, 真包含关系等.

关系的表示

1. 关系矩阵

若$A=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$， $B=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$， R是从A到B的关系，R的关系矩阵是布尔矩阵$M_R = [\, r_{ij} \,]_{m\times n}$, 其中

$$r_{ij} = 1 \Leftrightarrow < x_i, y_j > \in R.$$

2. 关系图

若$A= \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$R$是从$A$上的关系，$R$的关系图是$G_R=<A, R>$, 其中$A$为结点集，$R$为边集. 如果$<x_i,x_j>$属于关系$R$，在图中就有一条从 x_i 到 x_j 的有向边.

注意:

- 关系矩阵适合表示从A到B的关系或A上的关系（A,B为有穷集)
- 关系图适合表示有穷集A上的关系

实例

例4

$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,2\rangle\}$,

R的关系矩阵M_R和关系图G_R如下：

$$M_R=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$