离散数学

一、命题

1、命题：判断结果唯一、非真即假的陈述句。

（PS：悖论不是命题）。

真值：真或假 { 真命题 / 假命题.

2. 复合命题由多个简单(原子)命题通过联结词联结.

3、符号化： p：π是有理数. p的真值为0.

4. 联结：① $\neg$：否定联结词. $\neg p$：非p，复合命题.

② $\wedge$：合取~ $p \wedge q$：p并且q，合取式

③ $\vee$：析取~ $p \vee q$：p或q、析取式. { 相容或：者p 1 / 排斥或：只一个1 }

可使用 → "真值表"来记录

(多用于命题较多的时候)

p	q	r
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1

用二进制推

④ $\rightarrow$：蕴涵~ $p \rightarrow q$：如果p则q、蕴涵式. p：前件. q：后件.

p真q假. 则$p \rightarrow q$为假

（p假时. 空证明、所以$p \rightarrow q$真）

$p \rightarrow q$. { 若p则q（只要p则q） / p仅当q / 只有q，才p、 } $\Rightarrow$ q是p必要条件.

》看到p发生则q发生.

注：$p \rightarrow q$与$\neg q \rightarrow \neg p$等值.

二、命题公式与赋值

1. 常项、常元(命题) / 变项、变元(不是命题)：真值是否可以变化为划分标准

2. 合式公式(命题公式、命题形式)、简称"公式"：命题变项用联结词或( )联系的"符号串"

↳注：单个命题变项为公式，称为原子命题公式

3、公式的层数.

若A为单个命题变项，则A为0层公式.

• 以下：$A=p$ 为0层. (其中：A为表示任意的合式公式的"元语言符号" / p为表示某具体公式的"对象语言符号"

• 以下：A为$n+1$层.

(1). $A=\neg B$. B为n层

(2). $A=B \wedge C$. B与C分别为i与j层. 且$n=\max(i,j)$

(3) $A=B \vee C$. 同(2)

(4). $A=B \rightarrow C$. 同(2)

(5) $A=B \leftrightarrow C$. 同(2)

4、解释：将命题常项替换公式中命题变项

（即具体化）

5. 给A中出现的所有命题变项指定真值.

称为对A的赋值或解释. { 若一组值使A为1.则这组为A的成真赋值 / 反之会使A为0 则为成假赋值.

PS：按字母顺序排列. 如 $p.q.r$.中. $p=1$. $q=0$. $r=0$. 则100

6、A若衡为1，则A为"重言式"或"永真式"，

反之则为"矛盾式"或"永假式"

若A不为矛盾式，则称为"可满足式"　　A取值与哑元无关

7、A与B共有n个命题变项，将A中不含有的命题变项称为 A的哑元（如：A有p.q. B有p.r. 则r为哑元）。

所以若讨论是否A与B有相同真值表，即使B中含A哑元，只要哑元对B的值不做影响，仍可称A与B真值表相同。

如：A:

p	q	A
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

B:

p	q	r	B
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

r的取值无影响、

（补：真值表相同即、所有赋值，最后一列相同）。

三、等值式

1、若A与B构成$A\leftrightarrow B$为重言式，则A与B"等值"，记作$A\Leftrightarrow B$

（$\Leftrightarrow$为元语言符号）

2、证明等值：如$C\Leftrightarrow D$、直接给C与D赋值用真值表

3、等值式：① $\neg p\vee q \Leftrightarrow p\to q$ → 取A=p, B=q，p, q为"代入实例"

② $A\to B \Leftrightarrow \neg B\to\neg A$ （逆否）

Ps: A可换为¬A　③ 已知B，证A成立：$\underbrace{(\neg A\to B)}_{\text{B条件成立}}\wedge\underbrace{(\neg A\to\neg B)}_{\text{若A不成立则B不成立}} \Leftrightarrow A$ （反证）

尽量将↔与→化为∨与∧）

④ $A\Leftrightarrow A\wedge A$，$A\Leftrightarrow A\vee A$，$A\vee B\Leftrightarrow B\vee A$，$A\wedge B\Leftrightarrow B\wedge A$

⑤ $(A\vee B)\vee C \Leftrightarrow A\vee(B\vee C)$

$(A\wedge B)\wedge C \Leftrightarrow A\wedge(B\wedge C)$

⑥ $A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$

$A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$

⑦ $\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$

$\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$

⑧ $A\vee(A\wedge B)\Leftrightarrow A$

$A\wedge(A\vee B)\Leftrightarrow A$

（补：证"不等值"，化到一定形势后，用不同部分成真/假赋值不同来说明）

如 $(\neg p\vee\neg q)\vee r$ 与 $(p\wedge\neg q)\vee r$，只用讨论左边。

⑨ $A\vee 1\Leftrightarrow 1$

$A\wedge 0\Leftrightarrow 0$

⑩ $A\vee 0\Leftrightarrow A$　☆ 结合后面可将0与1替换为（$A\vee\neg A$，$A\wedge\neg A$）。　记得"置换"，有时分配律也可以"置换"，目的是分配后出现，消去。

$A\wedge 1\Leftrightarrow A$.

用分配尽量找这种 → ☆ ⑪ $A\vee\neg A\Leftrightarrow 1$，$A\wedge\neg A\Leftrightarrow 0$ → 三个、四个……变项都可以

⑫ $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\to B)\wedge(B\to A)$

$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow\neg A\leftrightarrow\neg B$

4、等值演算：由已知等值推另一些等值，中间可以用连"⇔"来连结。

5、置换规则：其实就是整体代入以及代换

每个人都有3种可能。

（补：当得知三个或多个命题为"全对、对一半、全不对"类似……时，需列出所有命题组合，取"∨"）

四、析取与合取范式

1、文字：命题变项与否定的总称

2、简单析(合)取式：有限个文字构成的析(合)取式 (包括 p, $\neg p$)

3、析取(合取)范式：由有限个简单合取(析取)式构成的析(合)取式 (包括 $p\vee q$, $p\wedge$

形如 $p\wedge\neg q\wedge r$ 即析范又合范

4、简析为永真 ⇔ 有 $p\vee\neg p$

简合为永假 ⇔ 有 $p\wedge\neg p$

5、析范永假 ⇔ 每个简合为假

合范永真 ⇔ 每个简析为真

6、范式存在定理：任何命题都存在等值析范与合范。

7、消 → 与 ↔

否定内移　　求范式手段

分配裂项 ☆ (可由一个式经不同分配得不同范式 (注意整体)

8、极大(小)项：每个命题变项及否定出现且出现一次。

规定：

公式	成真赋值	极小项及名称
$\neg p\wedge\neg q$	0 0	m_0
$\neg p\wedge q$	0 1	m_1
$p\wedge\neg q$	1 0	m_2
$p\wedge q$	1 1	m_3

角标与赋值二进制转换对应。

公式	成假赋值	极大项及名称
$p\vee q$	0 0	M_0
$p\vee\neg q$	0 1	M_1
$\neg p\vee q$	1 0	M_2
$\neg p\vee\neg q$	1 1	M_3

注：n 个命题变项有 2^n 极大与极小项。

$\neg m_i \Leftrightarrow M_i$

由赋值推公式

9、主析(合)取范式：所有简单合(析)取式都为极小(大)项的析(合)取范式。

求取技巧为上一页 10 与 11，缺什么补什么！

10：任何命题公式存在与之等值的主析(合)取范式，且唯一。 两都有

☆ 11：主析与主合关系：$M_0\wedge M_2\wedge M_4 \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$

主析与合可相互转化 (由"8"推)

若永真，则全极小项，反之全极大

五、联结词的完备集

1、称 $F:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 为 n 元真值函数 (一种映射)

n 元真值函数：2^{2^n} 个

如：2元，则有 $F_0^{(2)}$ …… $F_{15}^{(2)}$ 共 16 个

2、$\{0,1\}^n=\{000\cdots0,\ 000\cdots1,\ \cdots\cdots,\ 111\cdots1\}$

二进制。　定义域

如：$F_{14}^{(2)}$ 定义为：$F_{14}^{(2)}(00)=1$

$F_{14}^{(2)}(01)=1$

$F_{14}^{(2)}(10)=1$

$F_{14}^{(2)}(11)=0$

即：

pq	$F_{14}^{(2)} \Leftrightarrow M_3$
0 0	1
0 1	1
1 0	1
1 1	0

3、每一个真值函数与唯一的一个主析取范式等值

任何1个含n个命题变项的命题公式A都有唯一F与之对，且真值表相同。

4. 设S为一个联结词集合，若任何n元真值函数可由仅含S中联结词构成的公式表示，则S为联结词完备集。

5、$S=\{\neg,\vee,\wedge\}$ 为一个完备。

$S=\{\neg,\vee\}$　$S=\{\neg,\wedge\}$ 也是 ……

(否定不能少!)

6. $\downarrow$：或非联结词：$P\downarrow q \Leftrightarrow \neg(P\vee q)$

$\uparrow$：与非～：$P\uparrow q \Leftrightarrow \neg(P\wedge q)$

六. 推理的形成结构

1、若 $A_1\wedge A_2 \cdots \wedge A_n$ 为真或假、B也为真，则称由前提 $A_1, A_2 \cdots A_n$ 推出结论B 对于A与B中命题变项任何一组赋值 的推理是有效或正确的，B为"有效的结论"

2、由前提推结论的"推理"记为 $\{A_1, A_2 \cdots A_n\} \vdash B$，$\{A_1,\cdots A_n\} \vdash B$ 为"推理的形式结构"

若推理正确，则记为 $\{A_1 \cdots A_n\} \models B$

否则记为 $\{A_1 \cdots A_n\} \not\models B$

3、推理正确当且仅当 $(A_1\wedge A_2 \cdots A_n) \Rightarrow B$ 为"重言式"

PS：推理对，结论不一定对。

若推理对，则记为 $(A_1\wedge \cdots A_n) \Rightarrow B$

4. 重言蕴涵式

(1). $A \Rightarrow (A\vee B)$	附加律
(2). $(A\wedge B) \Rightarrow A$	化简～
(3) $(A\to B)\wedge A \Rightarrow B$	假言推理
(4) $(A\to B)\wedge \neg B \Rightarrow \neg A$	拒取式
(5) $(A\vee B)\wedge \neg B \Rightarrow A$	析取三段论
(6) $(A\to B)\wedge(B\to C) \Rightarrow (A\to C)$	假言～
(7) $(A\leftrightarrow B)\wedge(B\leftrightarrow C) \Rightarrow (A\leftrightarrow C)$	等价～
(8). $(A\to B)\wedge(C\to D)\wedge(A\vee C) \Rightarrow (B\vee D)$ $(A\to B)\wedge(\neg A\to B) \Rightarrow B$	构造性二难
(9). $(A\to B)\wedge(C\to D)\wedge(\neg B\vee \neg D) \Rightarrow (\neg A\vee \neg C)$	破坏性～

七、自然推理系统P

1. 格式为　① 公式～　说明～ (前提引入，①②拒取式之类).

②

⋮

ⓝ

当结论为 $S\to r$ 时，可"附加前提引入"S (记为"附加前提引入")

为 $\neg P$ 时 可"附加前提引入" P (记为"结论的否定引入")

(特殊的、若①：$(P\to q)$　⑥：$(\neg P\vee q)$，则⑥后说明为"置换")

2、附加前提证明法：$(A_1\wedge \cdots A_n) \to (A\to B) \Leftrightarrow (A_1\wedge\cdots\wedge A_n\wedge A) \to B$

A=附加前提

3、归谬法：$(A_1\wedge\cdots\wedge A_n) \to B$，若用 $\neg B$ 推某个永假，则可。

(通为 $A\wedge\neg A$)

杜题天

1.1 命题与联结词

$x+5>3$ | 不是命题，结果依赖于x

谷爱凌获2026年金牌 | 是命题，但真值未知.

悖论不是命题

不能再拆的最小原子命题 → 原子命题 or 简单命题

合取 $\wedge$　析取 $\vee$

蕴涵联结词：$\to$

$p\to q = \neg q\to\neg p$ 等值

p	q	$p\to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

空证明 (当p为假时，$p\to q$恒为真)

关注点

p仅当q (如果p，则q)

我吃意面，仅当我饿

p	q	$p\to q$
1	1	1
1	0	0

p: 天冷
q: 小王穿衣

除非

1. 只有天冷，小王才穿衣　$q\to p$ (当看到小王~，推出天冷)
2. 除非小王穿衣，否则天不冷　$p\to q$

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\to q$	$p\leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	1

1.2 命题公式及其赋值

命题常项或命题常元：简单命题 → 真值确定

命题变项或命题变元：取值1(真)或0(假)的变元

将~用联结词和圆括号按一定的逻辑关系联结起来的符号串 → 合式公式

合式公式的层次　$(\neg p\wedge q)\to r$, $(\neg(p\to\neg q))\wedge((r\vee s)\leftrightarrow\neg p)$，分别是3层、4层.

成真赋值 / 成假赋值

定义 1.8　设 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是出现在公式 A 中的全部命题变项，给 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 各指定一个真值，称为对 A 的一个**赋值**或**解释**.(若指定的一组值使 A 为 1，则称这组值为 A 的**成真赋值**；若使 A 为 0，则称这组值为 A 的**成假赋值**.)

p	q	$p\to q$ $=A$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

对于公式$A=p\to q$，其成真赋值为00, 01, 11.
成假~为10.

重言式 / 永真式 ← 若A在它的各种赋值下取值均为真

矛盾式 / 永假式 ← 若A在它的各种赋值下取值均为假

可满足式 ← 不是矛盾式

蕴涵联结词的实例

例5: 设 p: 天冷, q: 小王穿羽绒服, 将下列命题符号化

(1) 只要天冷, 小王就穿羽绒服.
(2) 因为天冷, 所以小王穿羽绒服.
(3) 若小王不穿羽绒服, 则天不冷.
(4) 只有天冷, 小王才穿羽绒服.
(5) 除非天冷, 小王才穿羽绒服.
(6) 除非小王穿羽绒服, 否则天不冷.
(7) 如果天不冷, 则小王不穿羽绒服.
(8) 小王穿羽绒服仅当天冷的时候.

注意: $p\to q$ 与 $\neg q\to\neg p$ 等值 (真值相同)

例5、

(1) $p\to q$
(2) $p\to q$
(3) $\neg q\to\neg p$
(4) $p\to q$ × $q\to p$
(5) $p\to q$ × $q\to p$ 除非才
(6) $q\to p$
(7) $\neg p\to\neg q$
(8) $q\to p$

p	q	r	$p\to q$	$(p\to q)\to r$	$q\to r$	$p\to(q\to r)$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

结论: $(p\to q)\to r$ 、$p\to(q\to r)$ 不等值

真值表课堂练习

例1. $(p\vee q)\to\neg r$, $(q\to p)\wedge q\to p$, $\neg(\neg p\vee q)\wedge q$

(1)

p	q	r	$p\vee q$	$\neg r$	$(p\vee q)\to\neg r$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

(2) 永真式

p	q	$q\to p$	$(q\to p)\wedge q$	$\sim\to p$
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

(3) 永假式

p	q	$\neg p\vee q$	$\neg(\neg p\vee q)$	$\neg(\neg p\vee q)\wedge q$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

例2.
(1) $p\to q$
(2) $\neg p\vee q$
(3) $(\neg p\vee q)\wedge((p\wedge r)\to p)$

p	q	$p\to q$	$\neg p$	$\neg p\vee q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

p	q	r	$\neg p\vee q$	$p\wedge r$	$(p\wedge r)\to p$	$(\neg p\vee q)\wedge\sim$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

2.1 等值式

定义2.1 若等价式$A\leftrightarrow B$是重言式，则称A与B等值，记作$A\Leftrightarrow B$，并称$A\Leftrightarrow B$是等值式

几点说明：

1. 定义中$\Leftrightarrow$不是联结符，为元语言符号
2. A或B中可能有哑元出现.

例如 $(p\to q)\Leftrightarrow((\neg p\vee q)\vee(\neg r\wedge r))$ r为左边公式的哑元.

3. 用真值表可检查两个公式是否等值.

根据这个命题和$p\leftrightarrow\neg\neg p$是重言式，得到$A\Leftrightarrow\neg\neg A$，其中$A$是任意的命题公式，称这个式子为等值式模式. 下面给出16组常用的重要等值式模式，以它们为基础进行演算，可以证明公式等值.

$\Leftrightarrow$ 等值（不是联结符!!!）

1. 双重否定律

$$A\Leftrightarrow\neg\neg A \tag{2.1}$$

2. 幂等律

$$A\Leftrightarrow A\vee A,\quad A\Leftrightarrow A\wedge A \tag{2.2}$$

3. 交换律

$$A\vee B\Leftrightarrow B\vee A,\quad A\wedge B\Leftrightarrow B\wedge A \tag{2.3}$$

4. 结合律

→蕴含不满足结合律

$$(A\vee B)\vee C\Leftrightarrow A\vee(B\vee C)$$
$$(A\wedge B)\wedge C\Leftrightarrow A\wedge(B\wedge C) \tag{2.4}$$

5. 分配律

$$A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)\quad(\vee\text{对}\wedge\text{的分配律})$$
$$A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)\quad(\wedge\text{对}\vee\text{的分配律}) \tag{2.5}$$

6. 德摩根律

$$\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B,\quad \neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B \tag{2.6}$$

7. 吸收律

$$A\vee(A\wedge B)\Leftrightarrow A,\quad A\wedge(A\vee B)\Leftrightarrow A \tag{2.7}$$

8. 零律

$$A\vee 1\Leftrightarrow 1,\quad A\wedge 0\Leftrightarrow 0 \tag{2.8}$$

$P\vee 1\Leftrightarrow P\vee(q\vee\neg q)$

$P\wedge 0\Leftrightarrow P\wedge(q\wedge\neg q)$

9. 同一律

析取零不变.

$$A\vee 0\Leftrightarrow A,\quad A\wedge 1\Leftrightarrow A \tag{2.9}$$

10. 排中律

$$A\vee\neg A\Leftrightarrow 1 \tag{2.10}$$

11. 矛盾律

$$A\wedge\neg A\Leftrightarrow 0 \tag{2.11}$$

12. 蕴涵等值式

（逆否命题）

$$A\to B\Leftrightarrow\neg A\vee B \tag{2.12}$$

13. 等价等值式

$$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\to B)\wedge(B\to A) \tag{2.13}$$

14. 假言易位

$$A\to B\Leftrightarrow\neg B\to\neg A \tag{2.14}$$

15. 等价否定等值式

$$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow\neg A\leftrightarrow\neg B \tag{2.15}$$

16. 归谬论

$$(A\to B)\wedge(A\to\neg B)\Leftrightarrow\neg A \tag{2.16}$$

2.2 析取范式与合取范式

单个文字既是简单析取式，又是简单合取式

形如 $p\wedge\neg q\wedge r$，$\neg p\vee q\vee\neg r$ 的公式既是析取范式，又是合取范式

求公式主范式的步骤

求公式**主析取范式**的步骤：

设公式A含命题变项$p_1,p_2,\ldots,p_n$

(1) 求A的析取范式$A'=B_1\vee B_2\vee\ldots\vee B_s$，其中$B_j$是简单合取式$j=1,2,\ldots,s$

(2) 若某个B_j既不含p_i，又不含$\neg p_i$，则将B_j展开成

$$B_j\Leftrightarrow B_j\wedge(p_i\vee\neg p_i)\Leftrightarrow(B_j\wedge p_i)\vee(B_j\wedge\neg p_i)$$

重复这个过程，直到所有简单合取式都是长度为n的极小项为止

(3) 消去重复出现的极小项，即用m_i代替$m_i\vee m_i$

(4) 将极小项按下标从小到大排列

求公式的**主合取范式**的步骤：

设公式A含命题变项$p_1,p_2,\ldots,p_n$

(1) 求A的合取范式$A'=B_1\wedge B_2\wedge\ldots\wedge B_s$，其中$B_j$是简单析取式$j=1,2,\ldots,s$

(2) 若某个B_j既不含p_i，又不含$\neg p_i$，则将B_j展开成

$$B_j\Leftrightarrow B_j\vee(p_i\wedge\neg p_i)\Leftrightarrow(B_j\vee p_i)\wedge(B_j\vee\neg p_i)$$

重复这个过程，直到所有简单析取式都是长度为n的极大项为止

(3) 消去重复出现的极大项，即用M_i代替$M_i\wedge M_i$

(4) 将极大项按下标从小到大排列

极小项与极大项

定义2.4

在含有n个命题变项的简单合取式（简单析取式）中，若每个命题变项均以文字的形式在其中出现且仅出现一次，而且第i个文字出现在左起第i位上（$1\le i\le n$），称这样的简单合取式（简单析取式）为极小项（极大项）.

余诗嘉

一：命题逻辑的基本概念

命题：非真即假的陈述句

“1”：真　　“0”：假

命题的符号化：p,q

简单命题/原子命题–>联结：复合命题

P 或 q：析取　　p 且 q：合取　　p–>q：蕴涵　　p 当且仅当 q:等价

表 1.1　联结词$\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow$的定义

p	q	$\neg p$	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\rightarrow q$	$p\leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1 空证明	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

N 个命题变相：2^n 个不同赋值

真值表

永真式/重言式　　永假式/矛盾式　　可满足式

二：命题逻辑等值演算

1. 双重否定律

$$A\Leftrightarrow\neg\neg A$$

2. 幂等律

$$A\Leftrightarrow A\vee A,\quad A\Leftrightarrow A\wedge A$$

3. 交换律

$$A\vee B\Leftrightarrow B\vee A,\quad A\wedge B\Leftrightarrow B\wedge A$$

4. 结合律

V、Λ

$$(A\vee B)\vee C\Leftrightarrow A\vee(B\vee C)$$
$$(A\wedge B)\wedge C\Leftrightarrow A\wedge(B\wedge C)$$

5. 分配律

$$A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)\quad(\vee\text{对}\wedge\text{的分配律})$$
$$A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)\quad(\wedge\text{对}\vee\text{的分配律})$$

6. 德摩根律

$$\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B,\quad\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$$

7. 吸收律

$$A\vee(A\wedge B)\Leftrightarrow A,\quad A\wedge(A\vee B)\Leftrightarrow A$$

8. 零律

$$A\vee 1\Leftrightarrow 1,\quad A\wedge 0\Leftrightarrow 0$$

9. 同一律

$$A\vee 0\Leftrightarrow A,\quad A\wedge 1\Leftrightarrow A$$

10. 排中律

$$A\vee\neg A\Leftrightarrow 1$$

11. 矛盾律

$$A\wedge\neg A\Leftrightarrow 0$$

12. 蕴涵等值式

$$A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg A\vee B$$

13. 等价等值式

$$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$$

14. 假言易位 –> 逆否命题

$$A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg B\rightarrow\neg A$$

15. 等价否定等值式

$$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow\neg A\leftrightarrow\neg B$$

16. 归谬论

反证法

$$(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow\neg B)\Leftrightarrow\neg A$$

$p \vee r$ 是析也是合（1个简单析取式）

定理 2.1 （1）一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含某个命题变项及它的否定式.

（2）一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含某个命题变项及它的否定式.

定义 2.3 由有限个简单合取式的析取构成的命题公式称作析取范式. 由有限个简单析取式的合取构成的命题公式称作合取范式. 析取范式与合取范式统称作范式.

极大项/极小项：

合取个　　　　析取

表 2.3 含 p,q 的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q$	0 0	m_0	$p \vee q$	0 0	M_0
$\neg p \wedge q$	0 1	m_1	$p \vee \neg q$	0 1	M_1
$p \wedge \neg q$	1 0	m_2	$\neg p \vee q$	1 0	M_2
$p \wedge q$	1 1	m_3	$\neg p \vee \neg q$	1 1	M_3

表 2.4 含 p,q,r 的极小项与极大项

p q r

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	0 0 0	m_0	$p \vee q \vee r$	0 0 0	M_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	0 0 1	m_1	$p \vee q \vee \neg r$	0 0 1	M_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	0 1 0	m_2	$p \vee \neg q \vee r$	0 1 0	M_2
$\neg p \wedge q \wedge r$	0 1 1	m_3	$p \vee \neg q \vee \neg r$	0 1 1	M_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	1 0 0	m_4	$\neg p \vee q \vee r$	1 0 0	M_4
$p \wedge \neg q \wedge r$	1 0 1	m_5	$\neg p \vee q \vee \neg r$	1 0 1	M_5
$p \wedge q \wedge \neg r$	1 1 0	m_6	$\neg p \vee \neg q \vee r$	1 1 0	M_6
$p \wedge q \wedge r$	1 1 1	m_7	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	1 1 1	M_7

主析取范式/主合取范式

二进制转换

真值函数：

2.3 联结词的完备集

定义 2.6 称 $F:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ 为 n 元真值函数.

在这个定义中，F 的自变量为 n 个命题变项，定义域 $\{0,1\}^n=\{00\cdots0,00\cdots1,\cdots,11\cdots1\}$，即由 0,1 组成的长为 n 的符号串的全体，值域为 $\{0,1\}$. n 个命题变项共可构成 2^{2^n} 个不同的真值函数. 1 元真值函数共有 4 个，如表 2.7 所示；2 元真值函数共有 16 个，如表 2.8 所示；3 元真值函数共有 $2^{2^3}=256$ 个.

表 2.7 1 元真值函数

p	$F_0^{(1)}$	$F_1^{(1)}$	$F_2^{(1)}$	$F_3^{(1)}$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

表 2.8 2 元真值函数

p q	$F_0^{(2)}$	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$	$F_3^{(2)}$	$F_4^{(2)}$	$F_5^{(2)}$	$F_6^{(2)}$	$F_7^{(2)}$
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1
p q	$F_8^{(2)}$	$F_9^{(2)}$	$F_{10}^{(2)}$	$F_{11}^{(2)}$	$F_{12}^{(2)}$	$F_{13}^{(2)}$	$F_{14}^{(2)}$	$F_{15}^{(2)}$
0 0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1

每个真值函数都与唯一的一个主析取范式（主合取范式）等值. 例如 $F_0^{(2)} \Leftrightarrow 0$（矛盾式），

三：命题逻辑的推论

有一些重要的重言蕴涵式，称作推理定律. 下面给出 9 条推理定律，它们是：

1. $A \Rightarrow (A \vee B)$	附加律
2. $(A \wedge B) \Rightarrow A$	化简律
3. $(A \to B) \wedge A \Rightarrow B$	假言推理
4. $(A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$	拒取式
5. $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$	析取三段论
6. $(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$	假言三段论
7. $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$	等价三段论
8. $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$	构造性二难
$(A \to B) \wedge (\neg A \to B) \Rightarrow B$	构造性二难（特殊形式）
9. $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$	破坏性二难

郭曼丽

命题：
- 命题：能判断真或假的陈述句
  - 条件：
    - 陈述句：陈述句、等式、不等式
    - 能确定真or假
- 分类：
  - 原子命题：不可分割的陈述句
  - 复合命题：通过联结词连接

真值表 ☆

P21 等值式模式 ☆

联结词
- 分类
  - 否定词(¬)：非、不、没有
  - 合取词(∧)：并且、既…又…、不但…而且、虽然…但是、一面…一面
  - 析取词(∨)：或、可兼或
  - 蕴涵词(→)：
    - 如果…则　若…则
    - 只要P就Q，因为P所以Q，P仅当Q ⇒ $P\to Q$
    - 只有Q才P，除非Q才P，除非Q否则P ⇒ $P\to Q$
  - 等价词(↔)：当且仅当
- 排序——强弱：非、合取、析取、蕴含、等价

公式类型：重言式、矛盾式、可满足式

朱家豪

习题1：P,q,r为3个命题变项，某公式A的主析取范式为 $m_0\vee m_3\vee m_6$

(i) 写出A的主合取范式

(ii) 写出A的所有成假赋值

习题2：已知有3个命题变项p,q,r，请写出A=q的主析取范式。郝云召

解：$q \Leftrightarrow (p\wedge\neg p)\vee q\vee(r\wedge\neg r)$

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)$

$\Leftrightarrow m_2\vee m_3\vee m_6\vee m_7$

$m_7\vee m_6\vee m_3\vee m_2$

[习题1 作答区]

解：主合取范式

(1) $M_1\wedge M_2\wedge M_4\wedge M_5\wedge M_7$

(2) 001, 010, 100, 101, 111

pqr

黄瑞斐

④ 习题3. 写出 $F_8^{(3)}$ 的主析取范式。m_4

解：吴张

p	q	r	$F_8^{(3)}$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

$(00001000)_2=8$

$F_8^{(3)}=m_4$

$=p\wedge\neg q\wedge\neg r$

$F_8^{(2)}$ P36

p	q	$F_8^{(2)}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$F_8^{(2)}=m_0$　$(1000)_2=8$

$m_0=\neg p\wedge\neg q$