11.1 格的定义与性质

主要内容

- 格的定义
- 与格有关的定理

格的定义

定义11.1 设$< S,\le >$是偏序集,如果$\forall\ x, y \in S$,$\{x,y\}$都有最小上界和最大下界,则称S关于$\le$构成一个格.

$x \vee y$表示x和y的最小上界
$x \wedge y$表示x和y的最大下界

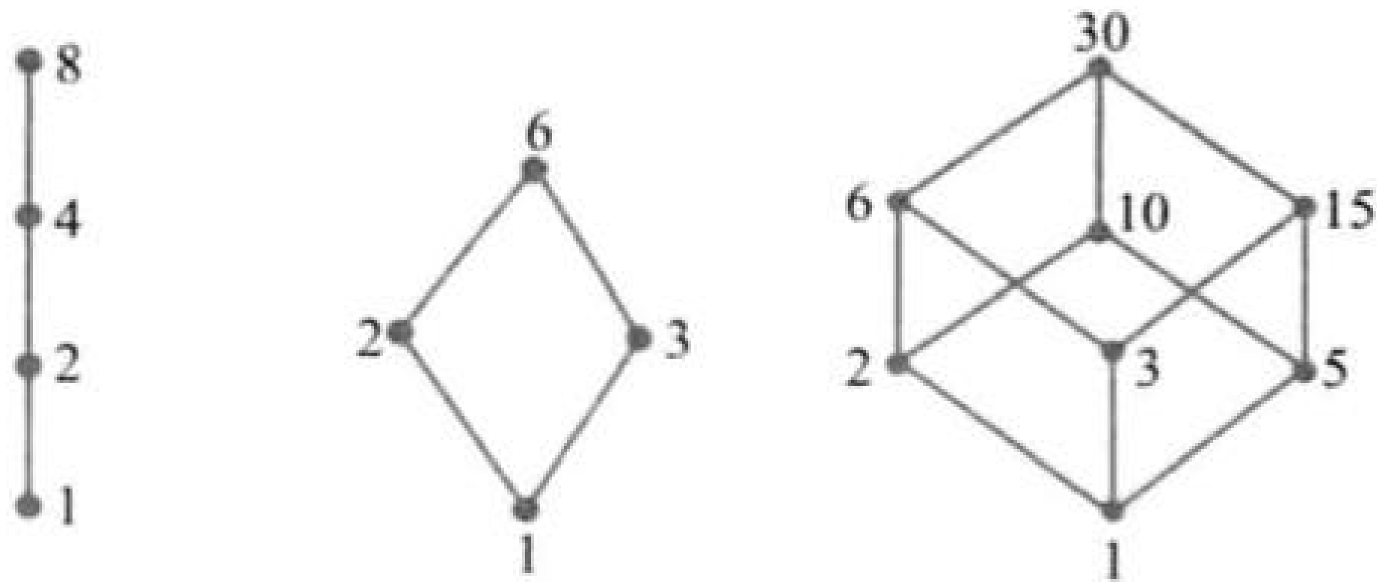
例11.1 设n为正整数,S_n为n的所有正的因数的集合,D为整除关系,则$<S_n,D>$构成格.

$\forall x,y \in S_n$,

$x \vee y$是x,y的最小公倍数[x,y],

$x \wedge y$是x,y的最大公约数(x,y)

格$<S_8,D>$,$<S_6,D>$和$<S_{30},D>$

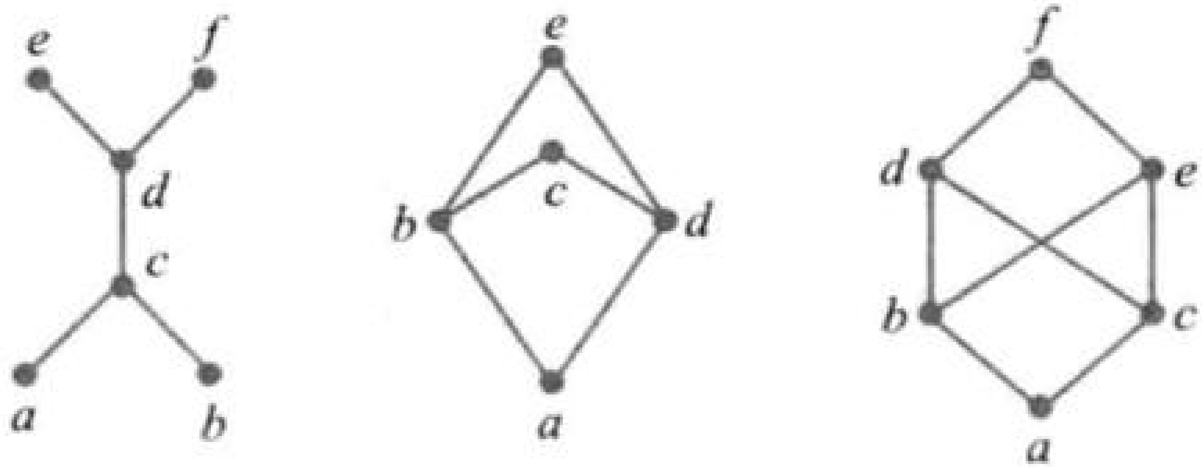


$\langle S_8, D\rangle$ $\langle S_6, D\rangle$ $\langle S_{30}, D\rangle$

x∨y是x,y的最小公倍数[x,y],

x∧y是x,y的最大公约数(x,y)

例11.2 判断图中偏序集是否构成格,说明为什么.



(a) (b) (c)

对偶原理

设f是含有格中的元素以及符号=,≤,≥, ∨,∧的命题,令f*是将f中的≤改写成≥,将≥改写成≤, ∨改写成∧,∧改写成∨所得到的命题,称为f的对偶命题.

对偶原理: 若 f对一切格为真,则f*也对一切格为真. 如,在格中有

$$(a \vee b) \wedge c \le c \quad \text{成立},$$

则有

$$(a \wedge b) \vee c \ge c \quad \text{成立}.$$

定理11.1 设$\langle L,\preceq\rangle$为格,则运算$\vee$和$\wedge$适合交换律、结合律、幂等律和吸收律,即

(1) $\forall a,b\in L$有 $a\vee b=b\vee a,\ a\wedge b=b\wedge a$

(2) $\forall a,b,c\in L$有 $(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$,

$(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$.

(3) $\forall a\in L$有 $a\vee a=a,\ a\wedge a=a$.

(4) $\forall a,b\in L$, 有 $a\vee(a\wedge b)=a$,

$a\wedge(a\vee b)=a$.

格的性质：序与运算的关系

定理11.2 设L是格, 则$\forall a,b \in L$有$a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$

格的性质：保序

定理11.3 设L是格, $\forall a,b,c,d \in L$，若$a \preccurlyeq b$ 且 $c \preccurlyeq d$, 则

$$a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d, \quad a \vee c \preccurlyeq b \vee d$$

例11.2：设L是格, 证明$\forall a,b,c \in L$有

$$a \vee (b \wedge c) \preccurlyeq (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

格作为代数系统的定义

定理11.4 设<S,*,∘>是具有两个二元运算的代数系统, 若对于*和∘运算适合交换律、结合律、吸收律, 则可以适当定义S中的偏序 $\preccurlyeq$,使得 <S,$\preccurlyeq$> 构成格, 且$\forall a,b \in S$ 有

$$a \wedge b = a * b,\ a \vee b = a \circ b.$$

根据定理11.4, 可以给出格的另一个等价定义.

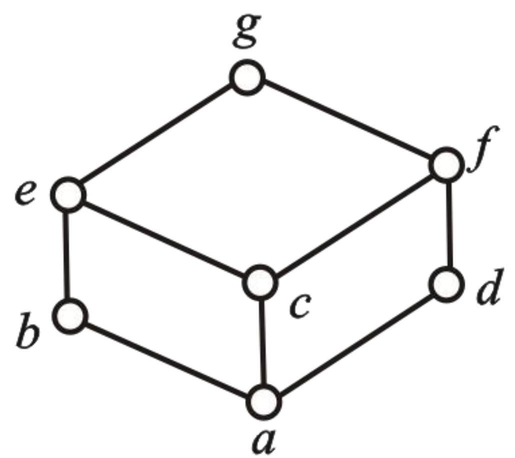
定义11.3 设<S, *, ∘ >是代数系统, *和∘是二元运算, 如果*和∘满足交换律、结合律和吸收律, 则<S, *,∘>构成格.

定义11.4 设$<L, \wedge, \vee>$是格，S是L的非空子集，若S关于L中的运算$\wedge$和$\vee$仍构成格，则称S是L的**子格**.

例4: 设格L如图所示. 令

$S_1=\{a, e, f, g\}$,

$S_2=\{a, b, e, g\}$



S_1不是L的子格，因为$e, f \in S_1$ 但

$e \wedge f = c \notin S_1$.

S_2是L的子格.

格的另一个等价的定义.

设<S,*,°>是具有两个二元运算的代数系统,

且对于*和°运算适合交换律、结合律、吸收律,

则可以适当定义S中的偏序≤使得<S,≤>构成一个格,

且$\forall$ a,b$\in$S 有

$$a \wedge b = a * b,$$

$$a \vee b = a \circ b.$$