第五部分 图论

本部分主要内容

- 图的基本概念
- 欧拉图、哈密顿图
- 树
- 平面图（略)
- 支配集、覆盖集、独立集、匹配与着色

第十四章 图的基本概念

- 主要内容
- 图
- 通路与回路
- 图的连通性
- 图的矩阵表示
- 图的运算

- 预备知识
- 多重集合——元素可以重复出现的集合
- 无序集——$A\&B=\{(x,y) \mid x\in A\wedge y\in B\}$

14.1 图

1. 图的定义

(1) 无向图

定义14.1 无向图$G = <V,E>$, 其中

(1) $V \neq \varnothing$为顶点集，元素称为顶点

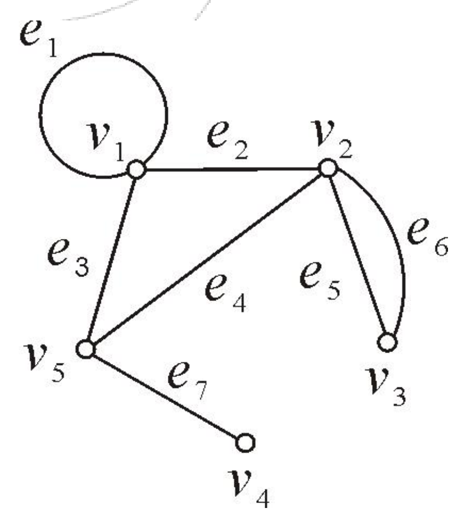
(2) E为$V\&V$ 的多重集，其元素称为无向边，简称边

•实例

设 $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_5\}$,

$E = \{(v_1,v_1), (v_1,v_2), (v_2,v_3), (v_2,v_3), (v_2,v_5), (v_1,v_5), (v_4,v_5)\}$

则 $G = <V,E>$为一无向图

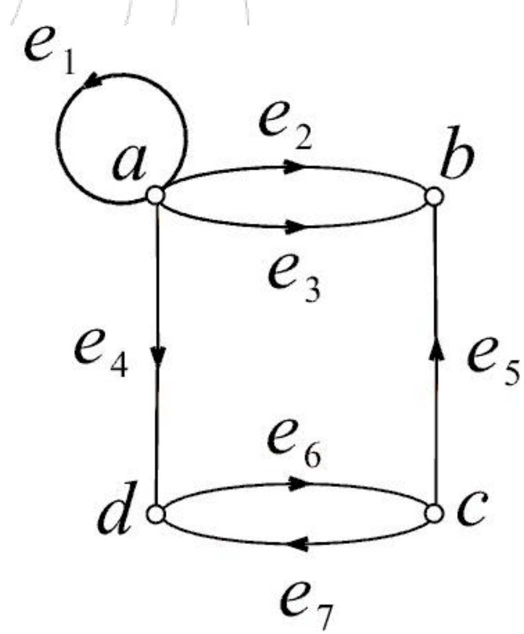


有向图

(2) 有向图

定义14.2 有向图$D=<V,E>$, 只需注意E是$V\times V$ 的多重子集

图2表示的是一个有向图，试写出它的V和 E



注意：图的数学定义与图形表示，

在同构（待叙）的意义下是一一对应的。

相关概念

1. 图

   ① 可用G泛指图（无向的或有向的）

   ② $V(G)$, $E(G)$, $V(D)$, $E(D)$

   ③ n阶图

2. 有限图
3. n 阶零图与平凡图
4. 空图——$\varnothing$
5. 用 e_k 表示无向边或有向边
6. 顶点与边的关联关系

   ① 关联、关联次数

   ② 环

   ③ 孤立点

7. 顶点之间的相邻与邻接关系

相关概念

8. 邻域与关联集

① $v \in V(G)$ (G为无向图)

v的邻域 $N(v)=\{u \mid u \in V(G) \wedge (u,v) \in E(G) \wedge u \neq v\}$

v的闭邻域 $\overline{N}(v)=N(v) \cup \{v\}$

v 的关联集 $I(v)=\{e \mid e \in E(G) \wedge e\text{与}v\text{关联}\}$

② $v \in V(D)$ (D为有向图)

v的后继元集 $\Gamma_D^+(v)=\{u \mid u \in V(D) \wedge \langle v,u \rangle \in E(D) \wedge u \neq v\}$

v的先驱元集 $\Gamma_D^-(v)=\{u \mid u \in V(D) \wedge \langle u,v \rangle \in E(D) \wedge u \neq v\}$

v的邻域 $N_D(v)=\Gamma_D^+(v) \cup \Gamma_D^-(v)$

v的闭邻域 $\overline{N}_D(v)=N_D(v) \cup \{v\}$

9. 标定图与非标定图

10. 基图

多重图与简单图

定义14.3 （p295）

(1) 无向图中的平行边及重数

(2) 有向图中的平行边及重数（注意方向性）

(3) 多重图

(4) 简单图

在定义14.3中定义的简单图是极其重要的概念

顶点的度数

定义14.4

(1) 设$G=\langle V,E\rangle$为无向图, $\forall v \in V$, $d(v)$——v的度数, 简称度

(2) 设$D=\langle V,E\rangle$为有向图, $\forall v \in V$,

$d^+(v)$——v的出度

$d^-(v)$——v的入度

$d(v)$——v的度或度数

(3) $\Delta(G)$, $\delta(G)$

(4) $\Delta^+(D)$, $\delta^+(D)$, $\Delta^-(D)$, $\delta^-(D)$, $\Delta(D)$, $\delta(D)$

(5) 奇顶点度与偶度顶点

握手定理

定理14.1 设$G=\langle V,E\rangle$为任意无向图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $|E|=m$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$

握手定理

定理14.2 设$D=<V,E>$为任意有向图， $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $|E|=m$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m, \quad \text{且} \quad \sum_{i=1}^{n} d^{+}(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d^{-}(v_i) = m$$

本定理的证明类似于定理14.1

握手定理推论

推论 任何图 (无向或有向) 中，奇度顶点的个数是偶数.

握手定理应用

例1 无向图G有16条边，3个4度顶点，4个3度顶点，其余顶点度数均小于3，问G的阶数n为几?

图的度数列

1 . $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$为无向图$G$的顶点集，称$d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$为$G$的度数列.

2. $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$为有向图$D$的顶点集,

D的度数列：$d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$

D的出度列：$d^+(v_1), d^+(v_2), \ldots, d^+(v_n)$

D的入度列：$d^-(v_1), d^-(v_2), \ldots, d^-(v_n)$

3. 非负整数列$d=(d_1, d_2, \ldots, d_n)$是可图化的/可简单图化的判别.

定理14.3/ 定理14.4

易知：(2, 4, 6, 8, 10)，(1, 3, 3, 3, 4) 是可图化的，后者又是可简单图化的，而(2, 2, 3, 4, 5)，(3, 3, 3, 4) 都不是可简单图化的，特别是后者也不是可图化的.

图的同构

定义14.5 设$G_1=<V_1,E_1>$, $G_2=<V_2,E_2>$为两个无向图，若存在双射函数$f:V_1\to V_2$,

(i)对于$v_i,v_j\in V_1$, $(v_i,v_j)\in E_1$ 当且仅当 $(f(v_i),f(v_j))\in E_2$;

(ii)并且, (v_i,v_j) 与 $(f(v_i),f(v_j))$ 的重数相同,

则称G_1与G_2是同构的，记作$G_1\cong G_2$.

定义14.5 设$G_1=<V_1,E_1>$, $G_2=<V_2,E_2>$为两个有向图，若存在双射函数$f:V_1\to V_2$,

(i)对于$v_i,v_j\in V_1$, $<v_i,v_j>\in E_1$ 当且仅当 $<f(v_i),f(v_j)>\in E_2$;

(ii)并且, $<v_i,v_j>$与 $<f(v_i),f(v_j)>$的重数相同,

则称G_1与G_2是同构的，记作$G_1\cong G_2$.

图的同构

同构的性质

1.图之间的同构关系具有自反性、对称性和传递性.

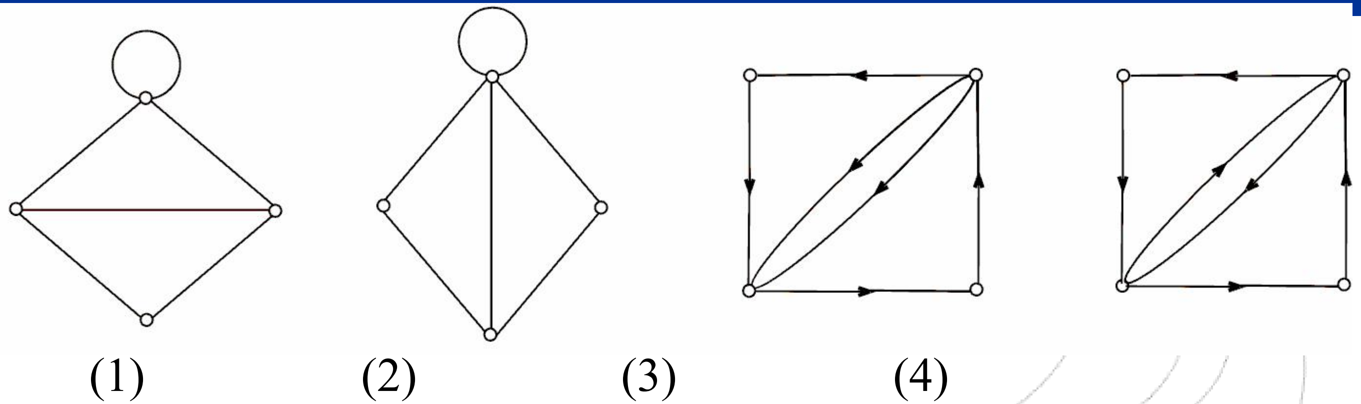
2.能找到多条同构的必要条件，但它们全不是充分条件:

① 边数相同，顶点数相同; ② 度数列相同;

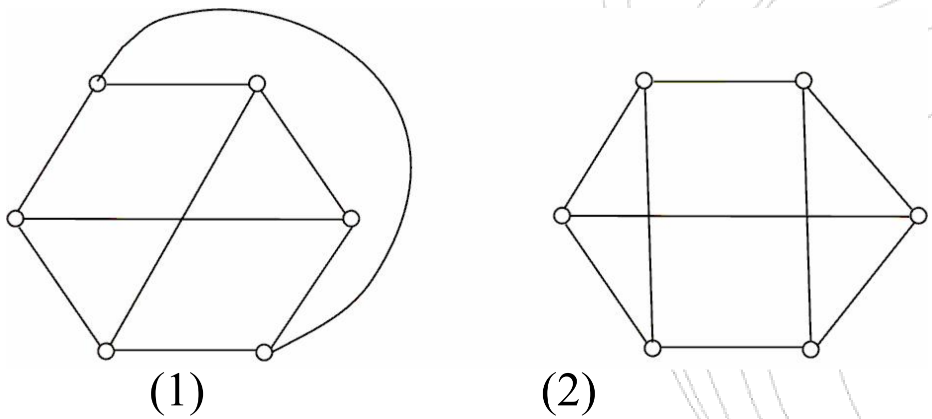
③ 对应顶点的关联集及邻域的元素个数相同，等等

因此，若破坏必要条件，则两图不同构；但判断两个图同构是个难题!

图同构的实例



图中，(1)与(2)不同构，(3)与(4)也不同构．（度数列不同）



图中(1)与(2)的度数列相同，它们同构吗？为什么？

n 阶完全图与竞赛图

定义14.6 （p298）

(1) n (n≥1) 阶无向完全图——每个顶点与其余顶点均相邻的无向简单图，记作 K_n.

简单性质：边数 $m=\dfrac{n(n-1)}{2}, \Delta=\delta=n-1$

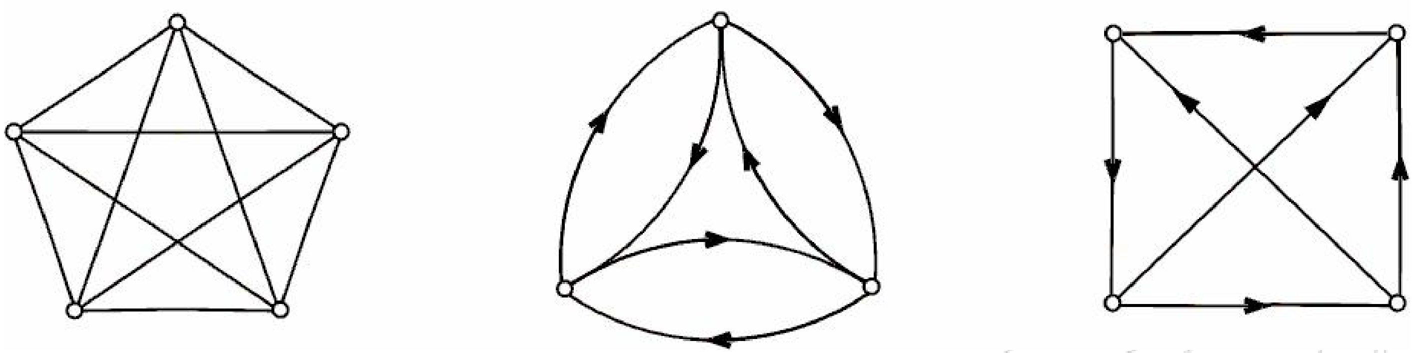
(2) n (n≥1)阶有向完全图——每对顶点之间均有两条方向相反的有向边的有向简单图.

简单性质：边数 $m=n(n-1), \Delta=\delta=2(n-1), \Delta^{+}=\delta^{+}=n-1$

(3) n (n≥1) 阶竞赛图——基图为K_n的有向简单图.

简单性质：边数 $m=\dfrac{n(n-1)}{2}, \Delta=\delta=n-1$

n 阶 k 正则图



(1)　　　　(2)　　　　(3)

(1)为K_5，(2)为3阶有向完全图，(3)为4阶竞赛图

定义14.7　n 阶k正则图——Δ=δ=k 的无向简单图

简单性质：边数（由握手定理得）　$m=\dfrac{nk}{2}$

K_n是 n–1-正则图，

彼得松图（见书上图14.3(1) 所示，记住它）是3-正则图

子 图

定义14.8 $G=<V,E>$, $G'=<V',E'>$

(1) $G'\subseteq G$ —— G'为G的子图，G为G'的母图

(2) 若$G'\subseteq G$且$V'=V$，则称G'为G的生成子图

(3) 若$V'\subset V$或$E'\subset E$，称G'为G的真子图

(4) V'（$V'\subset V$且$V'\neq\varnothing$）的导出子图，记作$G[V']$

(5) E'（$E'\subset E$且$E'\neq\varnothing$）的导出子图，记作$G[E']$

实 例

例2 画出K_4的所有非同构的生成子图

补 图

定义14.9 设$G=<V,E>$为n阶无向简单图，以V为顶点集，以所有使G成为完全图K_n的添加边组成的集合为边集的图，称为G的补图，记作 $\overline{G}$.

若$G\cong \overline{G}$, 则称G是自补图.

相对于K_4, 求上面图中所有图的补图，并指出哪些是自补图.

问：互为自补图的两个图的边数有何关系?