14.2 通路与回路

定义14.11 给定图$G=<V,E>$（无向或有向的），G中顶点与边的交替序列 $\Gamma = v_0e_1v_1e_2\ldots e_lv_l$，$v_{i-1}, v_i$ 是 e_i 的端点.

(1) 通路与回路：Γ 为通路；若 $v_0=v_l$，Γ 为回路，l 为回路长度.

(2) 简单通路与回路：所有边各异，Γ 为简单通路，又若$v_0=v_l$，Γ 为简单回路

(3) 初级通路(路径)与初级回路(圈)：Γ 中所有顶点各异，则称Γ 为初级通路(路径)，又若除$v_0=v_l$，所有的顶点各不相同且所有的边各异，则称Γ 为初级回路(圈)

(4) 复杂通路与回路：有边重复出现

几点说明

表示法

① 定义表示法

② 只用边表示法

③ 只用顶点表示法（在简单图中）

④ 混合表示法

环（长为1的圈）的长度为1，两条平行边构成的圈长度为2，无向简单图中，圈长≥3，有向简单图中圈的长度≥2.

不同的圈（以长度≥3的为例）

① 定义意义下

无向图：图中长度为l（l≥3）的圈，定义意义下为$2l$个

有向图：图中长度为l（l≥3）的圈，定义意义下为l个

② 同构意义下：长度相同的圈均为1个

试讨论l=3和l=4的情况

通路与回路的长度

定理14.5 (见p301证明) 在n阶图G中，若从顶点v_i到v_j（$v_i \neq v_j$）存在通路，则从v_i到v_j存在长度小于或等于$n-1$的通路.

推论 在n阶图G中，若从顶点v_i到v_j（$v_i \neq v_j$）存在通路，则从v_i到v_j存在长度小于或等于$n-1$的初级通路（路径）.

定理14.6 在一个n阶图G中，若存在v_i到自身的回路，则一定存在v_i到自身长度小于或等于n的回路.

推论 在一个n阶图G中，若存在v_i到自身的简单回路，则一定存在长度小于或等于n的初级回路.

14.3 图的连通性

无向图的连通性

(1) 顶点之间的连通关系：$G=<V,E>$为无向图

① 若 v_i 与 v_j 之间有通路，则 $v_i \sim v_j$

② ~是V上的等价关系 $R=\{<u,v>|\ u,v \in V 且 u \sim v\}$

(2) G的连通性与连通分支

① 若$\forall u,v \in V$，$u \sim v$，则称G连通

② $V/R=\{V_1,V_2,\ldots,V_k\}$，称$G[V_1], G[V_2], \ldots,G[V_k]$为连通分支，其个数 $p(G)=k$ $(k\geq 1)$;

如果 $k=1$，G连通

*

短程线与距离

(3) 短程线与距离

① u与v之间的短程线：$u \sim v$，u与v之间长度最短的通路

② u与v之间的距离：$d(u,v)$——短程线的长度

③ $d(u,v)$的性质：

$d(u,v) \geq 0$, $u \nsim v$时$d(u,v)=\infty$

$d(u,v)=d(v,u)$

$d(u,v)+d(v,w) \geq d(u,w)$

无向图的连通度

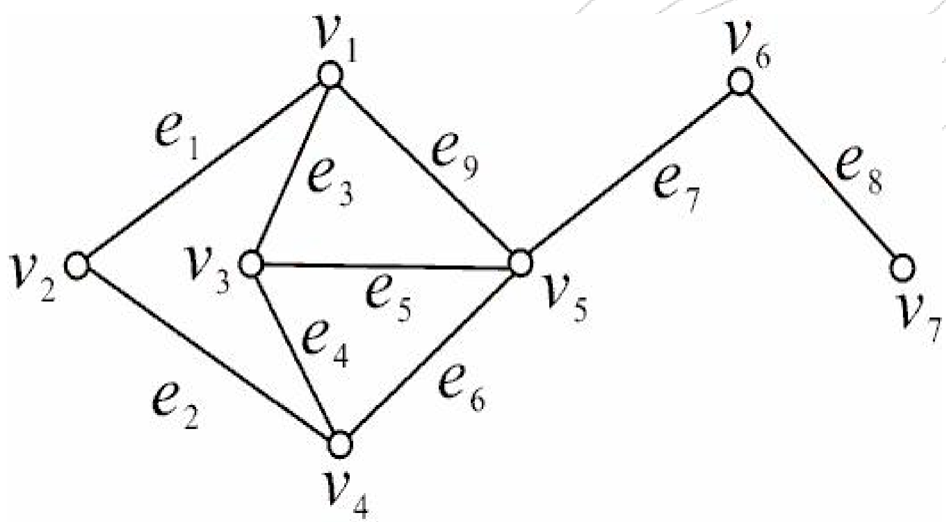
1. 删除顶点及删除边

$G-v$ ——从G中将v及关联的边去掉

$G-V'$——从G中删除V'中所有的顶点及其关联的边

$G-e$ ——将e从G中去掉

$G-E'$——删除E'中所有边



无向图的连通度

2. 点割集与边割集

(1) 点割集与割点

定义14.16 $G=<V,E>$, $V'\subset V$

V'为点割集——$p(G-V')>p(G)$且有极小性 （见p303定义）

v为割点——$\{v\}$为点割集

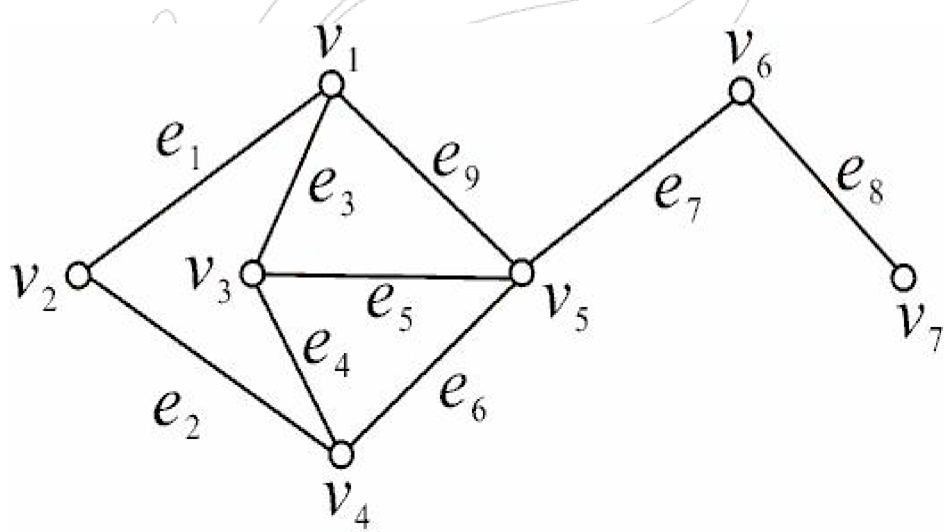
(2) 边割集

例3 请观察:

$\{v_1,v_4\}$, $\{v_6\}$是点割集,

v_6是割点.

$\{v_2,v_5\}$是点割集吗?



无向图的连通度

2. 点割集与边割集

(2) 边割集

定义14.17 $G=<V,E>$, $E'\subseteq E$

E'是边割集——$p(G-E')>p(G)$且有极小性（见p303定义）

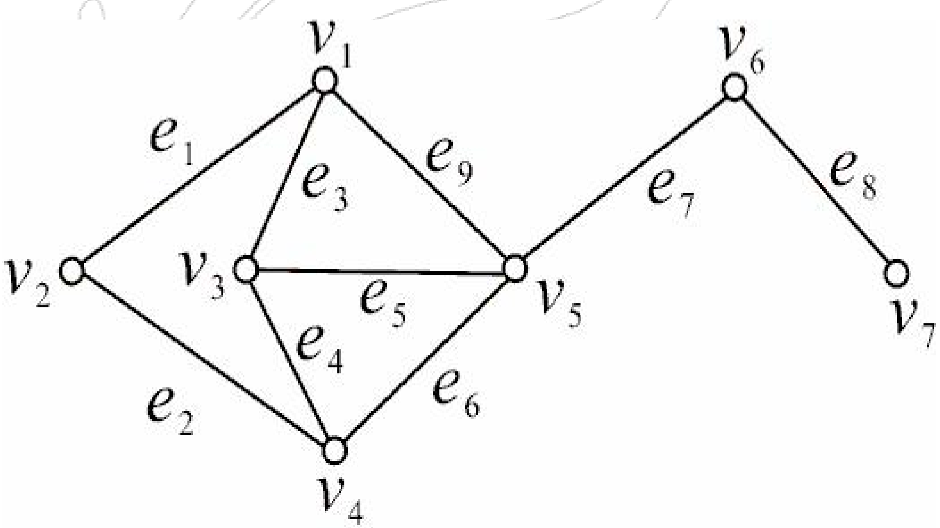
e是割边（桥）——$\{e\}$为边割集

例3' 请观察:

$\{e_1,e_2\}$，$\{e_1,e_3,e_5,e_6\}$，$\{e_8\}$等是边割集,

e_8是桥,

$\{e_7,e_9,e_5,e_6\}$ 是边割集吗?



点割集与割点

几点说明:

(1) K_n中无点割集，N_n中既无点割集，也无边割集，其中N_n为 n 阶零图.

(2) 若G 连通，E'为边割集，则 $p(G-E')=2$，V'为点割集，则 $p(G-V')\geq 2$ 。

为什么?

点连通度与边连通度

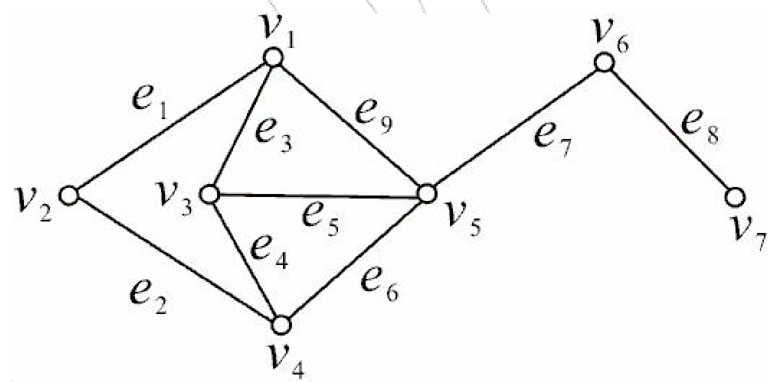
定义14.18 G为连通非完全图

点连通度— $\kappa(G) = \min\{\,|V'|\ \mid V'$为点割集$\,\}$

规定 $\kappa(K_n) = n-1$

若G非连通，$\kappa(G) = 0$

若 $\kappa(G)\geq k$，则称G为 k-连通图



定义14.19 设G为连通图

边连通度——$\lambda(G) = \min\{|E'|\ \mid E'$为边割集$\}$

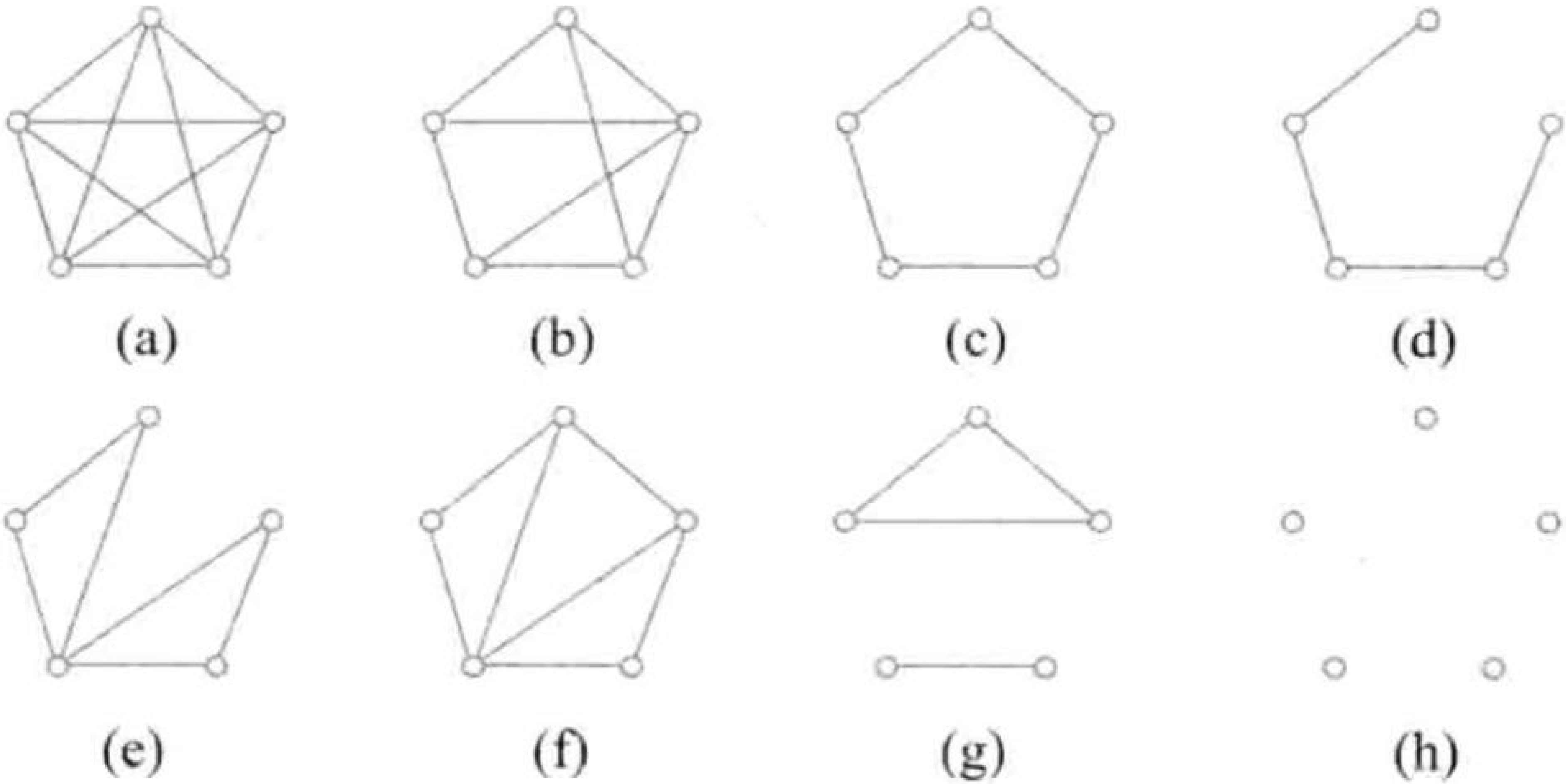
若G非连通，则$\lambda(G) = 0$

若$\lambda(G)\geq r$，则称G是 r 边-连通图

图中，$\kappa=\lambda=1$，它是 1-连通图 和 1边-连通图

*

P304 例14.6

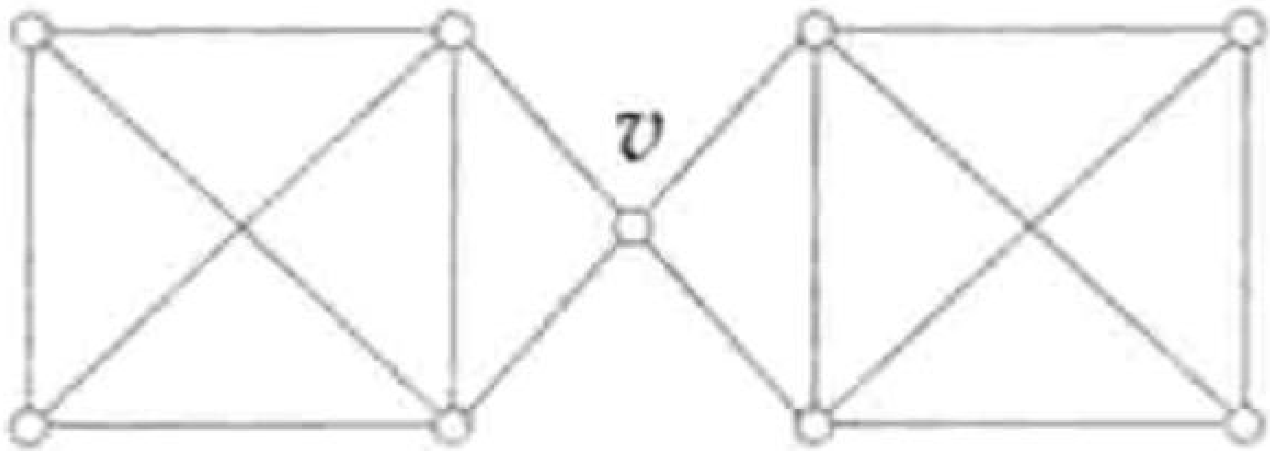


几点说明

- 1. 对于n阶连通图而言，$\kappa(K_n)=\lambda(K_n)=n-1$
- *2.* 如果*G*非连通，则 $\kappa=\lambda=0$
- 3. 若*G*中有割点，则$\kappa=1$，若有桥，则$\lambda=1$
- 4. 若$\kappa(G)=k$, 则*G*是1-连通图，2-连通图，…，*k*-连通图，但不是(k+s)-连通图，$s\geq1$
- 5. 若$\lambda(G)=r$, 则*G*是1-边连通图，2-边连通图，…，*r*-边连通图，但不是(r+s)-边连通图，$s\geq1$

定理7.5 $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$

思考： 请画出一个$\kappa<\lambda<\delta$的无向简单图 **P305 例14.7**



有向图的连通性

定义14.20 $D=<V,E>$为有向图

$v_i \to v_j$（v_i 可达 v_j）——v_i到v_j有通路

$v_i \leftrightarrow v_j$（v_i与v_j相互可达）

性质

(1) $\to$ 具有自反性($v_i \to v_i$)、传递性

(2) $\leftrightarrow$ 具有自反性($v_i \leftrightarrow v_i$)、对称性、传递性

v_i到v_j的短程线与距离

类似于无向图中，只需注意距离表示法的不同

注：无向图中$d(v_i,v_j)$，有向图中$d<v_i,v_j>$) 及 $d<v_i,v_j>$无对称性

有向图的连通性及分类

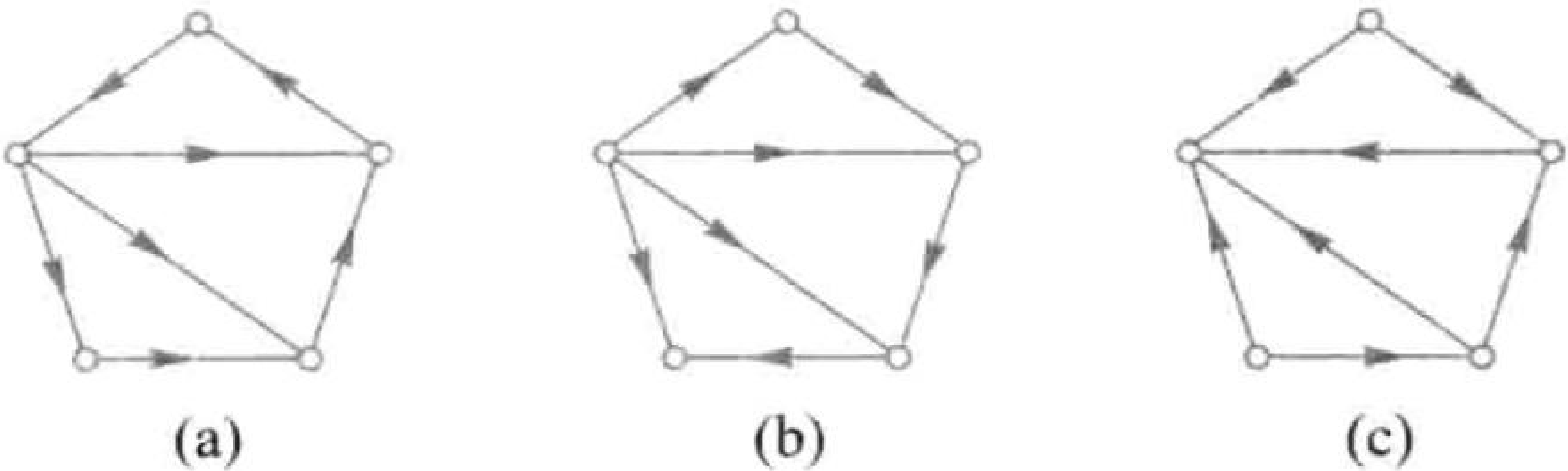
定义14.22 $D=<V,E>$为有向图

D弱连通(连通)——基图为无向连通图

D单向连通——$\forall v_i,v_j\in V$，$v_i\to v_j$ 或 $v_j\to v_i$

D强连通——$\forall v_i,v_j\in V$，$v_i\leftrightarrow v_j$

易知，强连通⇒单向连通⇒弱连通



有向图的连通性及分类

2. 连通性的判别法

定理14.8

"*D*强连通" 当且仅当 "*D*中存在经过每个顶点至少一次的回路"

定理14.9

"*D*单向连通"当且仅当"*D*中存在经过每个顶点至少一次的通路"

扩大路径法

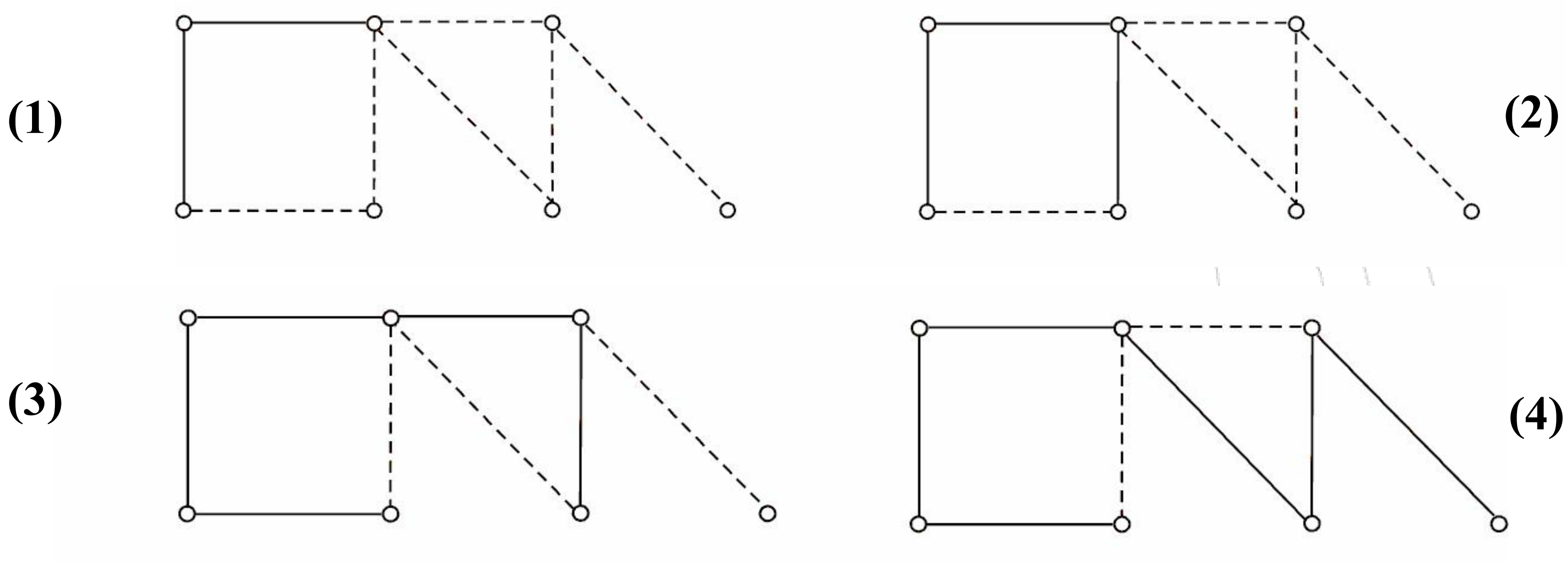
无向图中,

设$G=<V,E>$为 n 阶无向图，$E\neq\varnothing$. 设 Γ_l为G中一条路径，若此路径的始点或终点与通路外的顶点相邻，就将它们扩到通路中来，继续这一过程，直到最后得到的通路的两个端点不与通路外的顶点相邻为止.

设最后得到的路径为Γ_{l+k}（长度为 l 的路径扩大成了长度为 $l+k$ 的路径），称Γ_{l+k}为“极大路径”，称使用此种方法证明问题的方法为“扩大路径法”.

有向图中类似讨论，只需注意，在每步扩大中保证有向边方向的一致性.

实例



注：上图中，(1)中实线边所示的长为2的初始路径Γ，(2),(3),(4)中实线边所示的都是它扩展成的极大路径.

小结：

（1）由某条路径扩大出的极大路径不惟一；

（2）极大路径不一定是图中最长的路径.

问题：还能找到另外的极大路径吗?

扩大路径法的应用

例4 设 G 为 n（$n\geq3$）阶无向简单图，$\delta\geq2$，证明 G 中存在长度 $\geq\delta+1$ 的圈.

二部图

定义14.23 设 $G=<V,E>$为一个无向图，若能将 V分成 V_1和V_2 ($V_1 \cup V_2=V$，$V_1 \cap V_2=\varnothing$)，使得 G 中的每条边的两个端点都是一个属于V_1，另一个属于V_2，则称 G 为二部图 (或称二分图、偶图等)，称V_1和V_2为互补顶点子集，常将二部图G记为$<V_1,V_2,E>$.

又若G是简单二部图，V_1中每个顶点均与V_2中所有的顶点相邻，则称G为完全二部图，记为 $K_{r,s}$，其中$r=|V_1|$，$s=|V_2|$.

注意：n 阶零图为二部图.

二部图的判别法

定理14.10 无向图$G=<V,E>$是**二部图**当且仅当G中无奇圈

问题： 由定理14.10可知图9中各图都是二部图，哪些是完全二部图？哪些图是同构的？