14.4 图的矩阵表示

无向图的关联矩阵（对图无限制）

定义14.24 无向图$G=\langle V,E\rangle$，$|V|=n$，$|E|=m$，令 m_{ij}为 v_i 与 e_j 的关联次数，称$(m_{ij})_{n\times m}$为G 的关联矩阵，记为$M(G)$.

性质：

(1) $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 2 \quad (j = 1,2,\ldots,m)$

(2) $\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = d(v_i) \quad (i = 1,2,\ldots,n)$

(3) $\sum_{i,j} m_{ij} = 2m$

(4) 平行边的列相同

有向图的关联矩阵

有向图的关联矩阵（无环有向图）

定义14.25 有向图$D=<V,E>$，令

则称 $(m_{ij})_{n\times m}$为D的关联矩阵，记为$M(D)$.

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{为}e_j\text{的始点}\\ 0, & v_i\text{与}e_j\text{不关联}\\ -1, & v_i\text{为}e_j\text{的终点}\end{cases}$$

性质

(1) $\sum_{i=1}^{n} m_{ij}=0 \qquad (j=1,2,\ldots,m)$

(2) $\sum_{j=1}^{m}(m_{ij}=1)=d^{+}(v_i),\quad \sum_{j=1}^{m}(m_{ij}=-1)=d^{-}(v_i),\quad i=1,2,\ldots,n$

(3) $\sum_{i,j} m_{ij}=0$

(4) 平行边对应的列相同

有向图的邻接矩阵（无限制）

定义14.26 设有向图$D=<V,E>$, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, 令为顶点 v_i 邻接到顶点 v_j 边的条数，称为D的邻接矩阵，记作$A(D)$，或简记为A.

性质

(1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{+}(v_i), \quad i = 1,2,\ldots,n$

(2) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{-}(v_j), \quad j = 1,2,\ldots,n$

(3) $\sum_{i,j} a_{ij}^{(1)} = m$ ––– D中长度为1的通路数

(4) $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(1)}$ ––– D中长度为1的回路数

邻接矩阵的应用

定理14.11 设 A 为有向图 D 的邻接矩阵，$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ 为顶点集，则 A 的 l 次幂 A^l（$l\geq 1$）中元素

$a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中 v_i 到 v_j 长度为 l 的通路数；

$a_{ii}^{(l)}$ 为 v_i 到自身长度为 l 的回路数；

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的通路总数；

$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的回路总数.

推论 设 $B_l=A+A^2+\ldots+A^l$（$l\geq 1$），则

B_l 中元素 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(l)}$ 为 D 中长度小于或等于 l 的通路数.

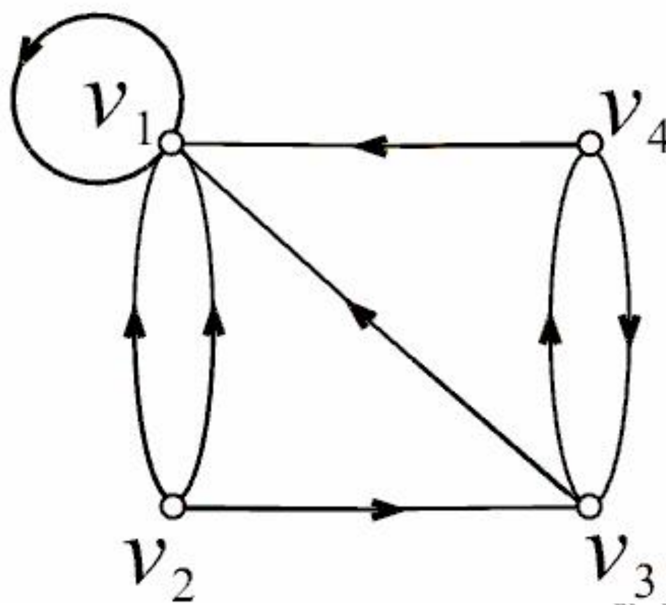
$\sum_{i=1}^{n} b_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度小于或等于 l 的回路数

实例

例5 有向图D如图所示，求 A, A_2, A_3, A_4，并回答诸问题:

(1) D 中长度为1, 2, 3, 4的通路各有多少条？其中回路分别为多少条？

(2) D 中长度小于或等于4的通路为多少条？其中有多少条回路？



有向图的可达矩阵（无限制）

定义14.27 设$D=\langle V,E\rangle$为有向图. $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 令

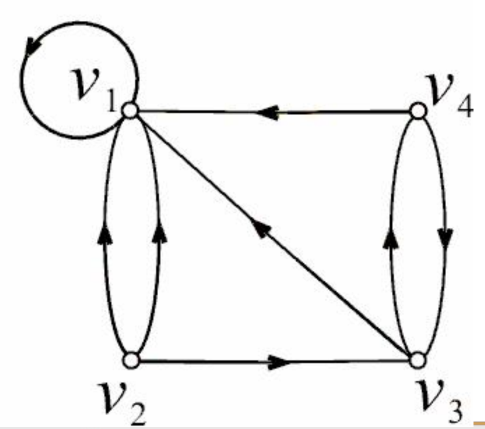
$$p_{ij}=\begin{cases}0, & v_i\text{可达}\,v_j\\ 1, & \text{否则}\end{cases}$$

称 $(p_{ij})_{n\times n}$ 为D的可达矩阵，记作$P(D)$，简记为P.

由于$\forall v_i\in V$，$v_i\leftrightarrow v_i$，所以$P(D)$主对角线上的元素全为1.

由定义不难看出, D 强连通当且仅当 $P(D)$为全1矩阵.

下图所示有向图 D 的可达矩阵为



$$P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$