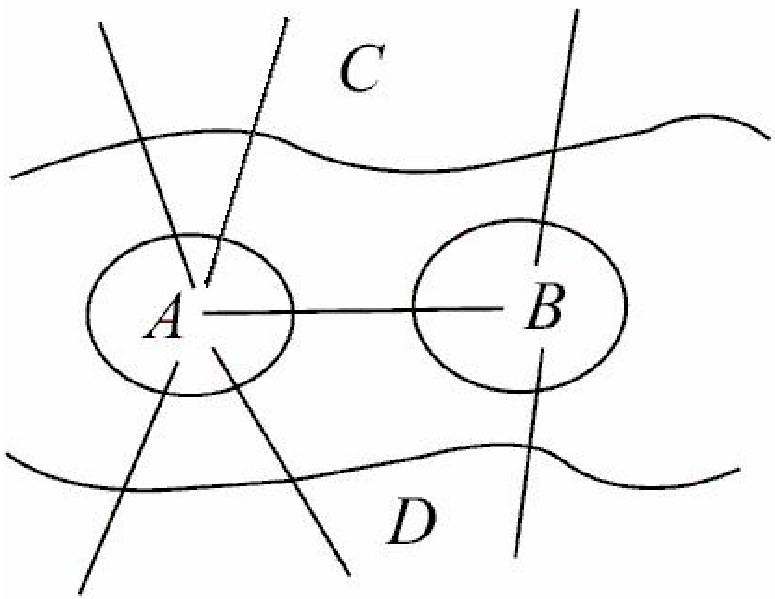
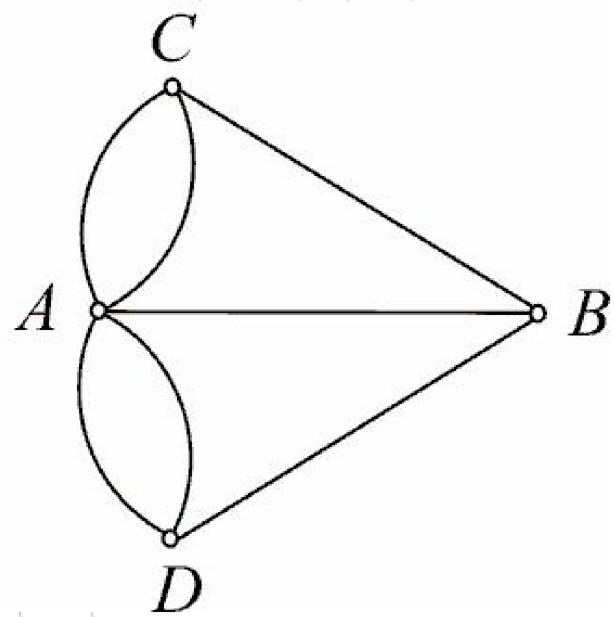
第十五章 欧拉图与哈密顿图

- 主要内容
- 欧拉图
- 哈密顿图
- 带权图与货郎担问题

15.1 欧拉图

历史背景：哥尼斯堡七桥问题与欧拉图





欧拉图定义

定义15.1

(1) 欧拉通路——经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的通路.

(2) 欧拉回路——经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的回路.

(3) 欧拉图——具有欧拉回路的图.

(4) 半欧拉图——具有欧拉通路而无欧拉回路的图.

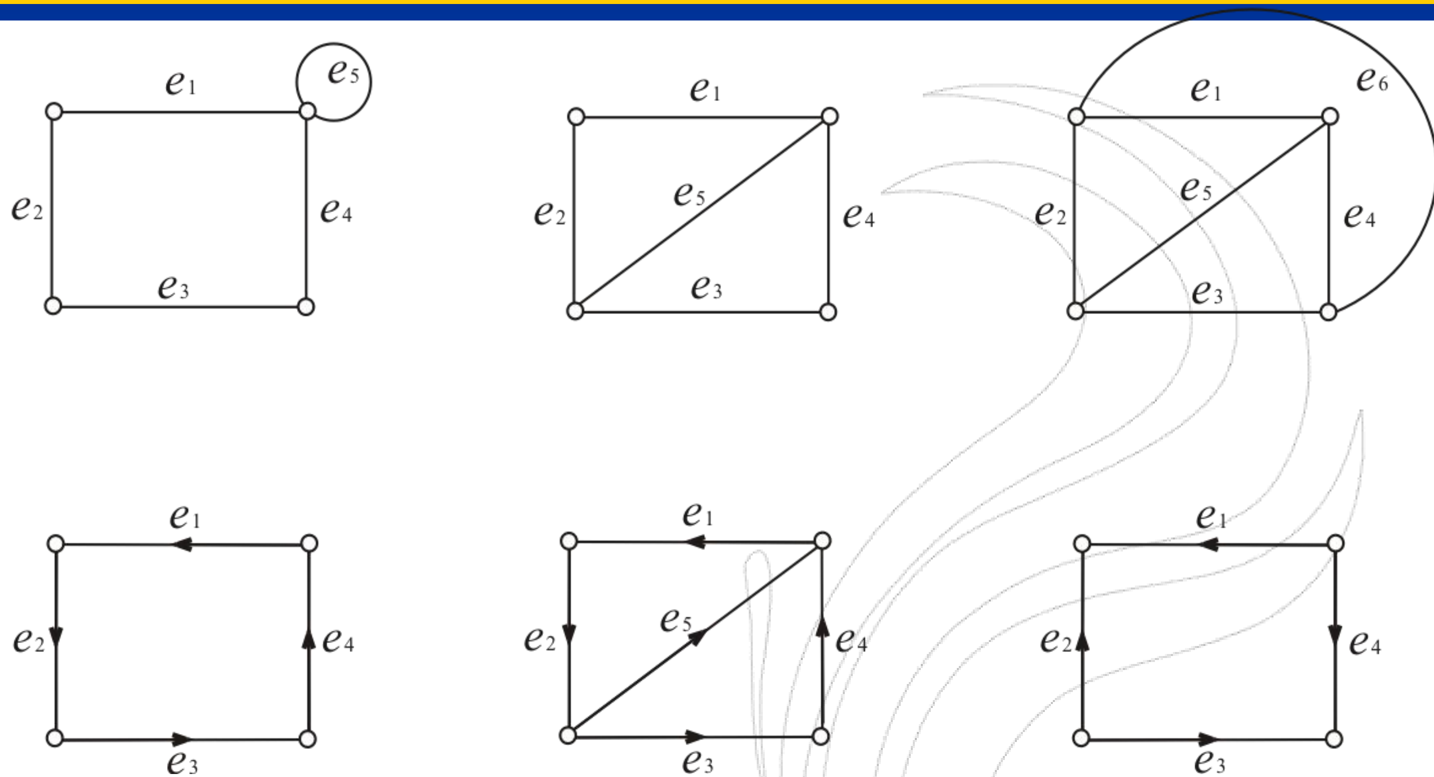
几点说明:

规定平凡图为欧拉图.

欧拉通路是生成的简单通路（过的边互异），欧拉回路是生成的简单回路.

环不影响图的欧拉性.

欧拉图实例



结论： 上图中，(1) ,(4) 为欧拉图，(2),(5)为半欧拉图，(3),(6)既不是欧拉图，也不是半欧拉图.

问题： 在(3),(6)中各至少加几条边才能成为欧拉图？

(参考定理15.1和15.3)

无向、有向欧拉图的判别法

定理15.1 无向图G是欧拉图当且仅当G连通且无奇度数顶点.

定理15.3 有向图D是欧拉图当且仅当D是强连通的且每个顶点的入度都等于出度.

从以上证明不难看出：欧拉图是若干个边不重的圈之并，见示意图3.

无向、有向 半欧拉图的判别法

定理15.2 无向图G是半欧拉图当且仅当G连通且恰有两个奇度顶点.

定理15.4 有向图D是半欧拉图当且仅当D是单向连通的，且D中恰有两个奇度顶点，其中一个的入度比出度大1，另一个的出度比入度大1，而其余顶点的入度都等于出度.

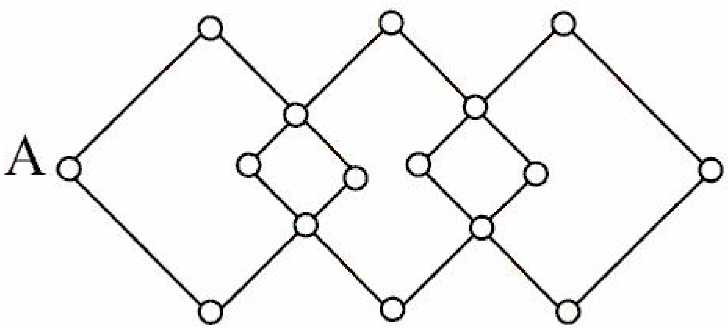
本定理的证明类似于定理15.1.

定理15.5 G是非平凡的欧拉图当且仅当G是连通的且为若干个边不重的圈之并.

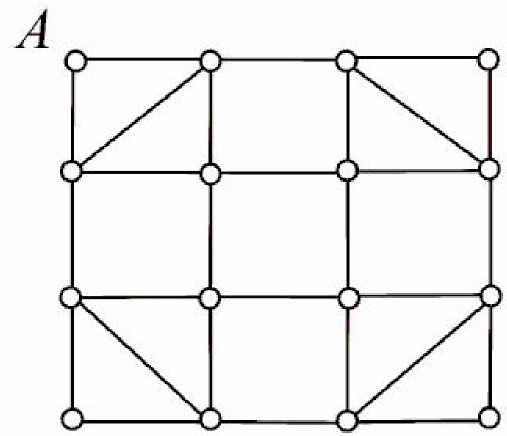
可用归纳法证定理15.5.

例题

例1 设G是欧拉图，但G不是平凡图，也不是一个环，则$\lambda(G)\geq 2$.



(1)



(2)

上图中，(1),(2)两图都是欧拉图，均从A点出发，如何一次成功地走出一条欧拉回路来？

Fleury算法

算法:

(1) 任取$v_0 \in V(G)$，令$P_0=v_0$.

(2) 设$P_i = v_0e_1v_1e_2\ldots e_iv_i$ 已经行遍，按下面方法从$E(G)-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$中选取 e_{i+1}:

(a) e_{i+1}与v_i相关联;

(b) 除非无别的边可供行遍，否则e_{i+1}不应为$G_i = G-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$中的桥.

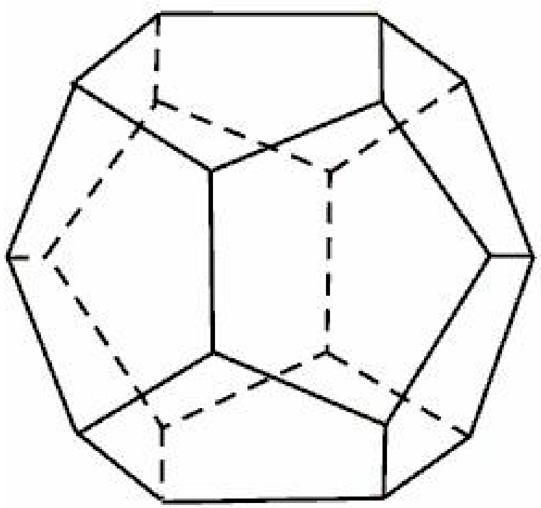
(3) 当 (2)不能再进行时，算法停止.

可以证明算法停止时所得简单通路 $P_m = v_0e_1v_1e_2\ldots e_mv_m$ ($v_m=v_0$)为G 中一条欧拉回路.

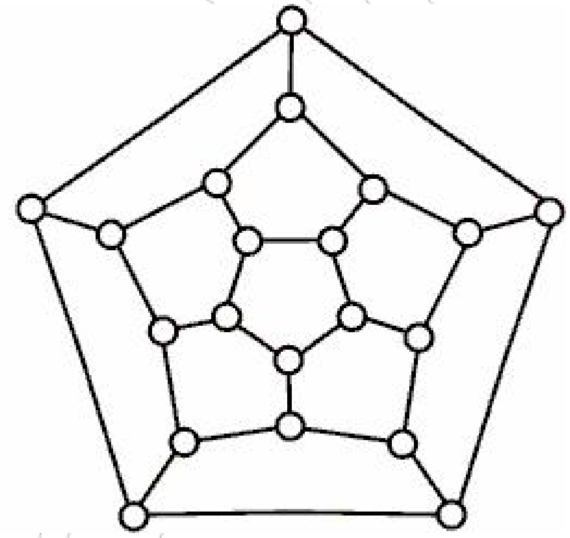
用Fleury算法走出上一页图(1),(2)从A出发（其实从任何一点出发都可以）的欧拉回路各一条.

15.2 哈密顿图

历史背景：哈密顿周游世界问题与哈密顿图



(1)



(2)

哈密顿图与半哈密顿图

定义15.2

(1) 哈密顿通路——经过图中所有顶点一次仅一次的通路.

(2) 哈密顿回路——经过图中所有顶点一次仅一次的回路.

(3) 哈密顿图——具有哈密顿回路的图.

(4) 半哈密顿图——具有哈密顿通路且无哈密顿回路的图.

几点说明:

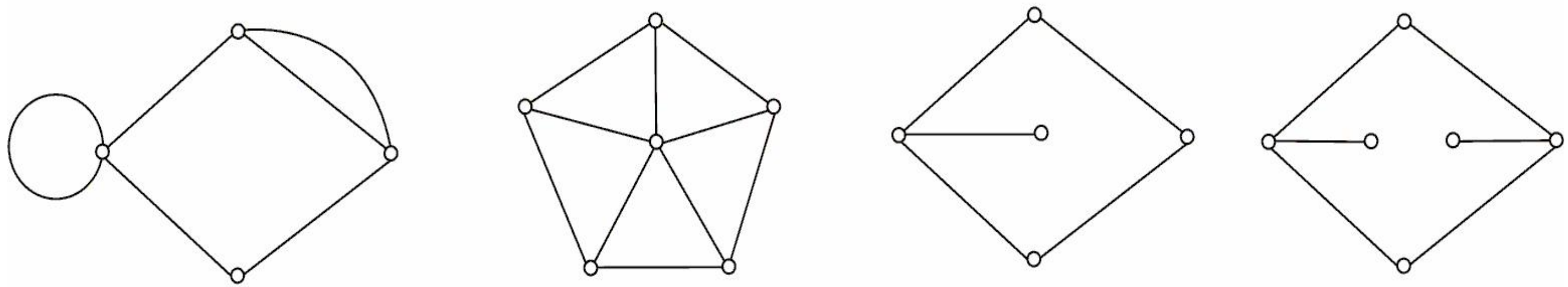
平凡图(1阶零图)是哈密顿图.

哈密顿通路是初级通路（过的点和边均互异），哈密顿回路是初级回路.

环与平行边不影响哈密顿性.

哈密顿图的实质是能将图中的所有顶点排在同一个圈上

实例



在上图中,
(1),(2) 是哈密顿图;
(3)是半哈密顿图;
(4)既不是哈密顿图，也不是半哈密顿图，为什么?
(参考定理15.6和推论)

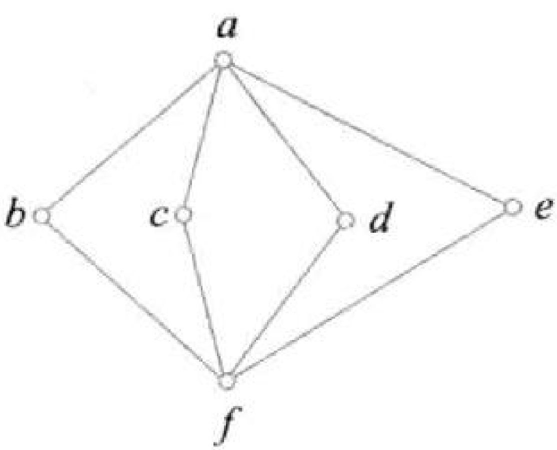
无向哈密顿图的一个必要条件

定理15.6 设无向图$G=<V,E>$是哈密顿图，对于任意$V_1\subset V$且$V_1\neq\varnothing$，均有 $p(G-V_1) \le |V_1|$

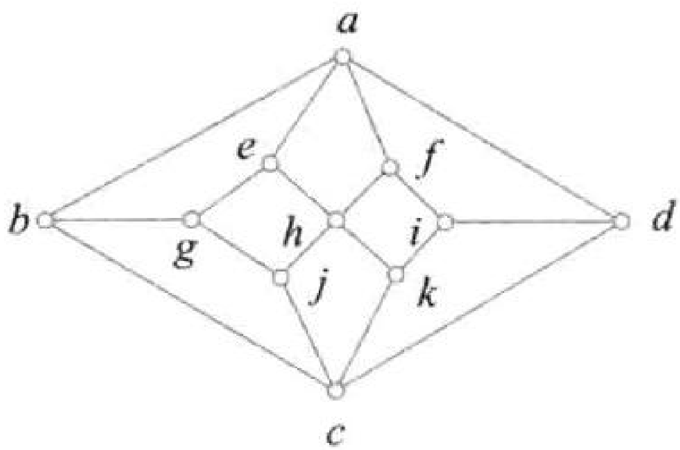
推论 设无向图$G=<V,E>$是半哈密顿图，对于任意的$V_1\subset V$且$V_1\neq\varnothing$均有

$$p(G-V_1) \le |V_1|+1$$

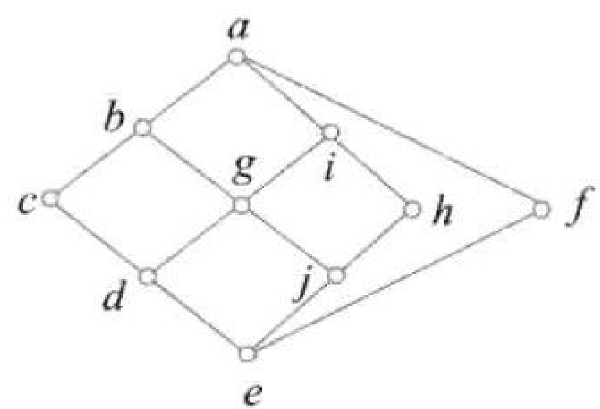
P320 例15.3



(a)



(b)



(c)

几点说明

定理15.6中的条件是哈密顿图的必要条件，但不是充分条件（彼得松图）

例2 设G为n阶无向连通简单图，若G中有割点或桥，则G不是哈密顿图.

无向哈密顿图的一个充分条件

定理15.7 设G是n阶无向简单图，若对于任意不相邻的顶点v_i,v_j，均有

$$d(v_i)+d(v_j) \geq n-1 \qquad (*)$$

则G 中存在哈密顿通路.

定理15.7是半哈密顿图的充分条件，但不是必要条件. 长度为$n-1$（$n \geq 4$）的路径构成的图不满足（*）条件，但它显然是半哈密顿图.

推论

推论 设G为n ($n \geq 3$) 阶无向简单图，若对于G中任意两个不相邻的顶点v_i, v_j，均有

$$d(v_i)+d(v_j) \geq n \qquad (**)$$

则G中存在哈密顿回路，从而G为哈密顿图.

定理15.8 设u,v为n阶无向简单图G中两个不相邻的顶点，且$d(u)+d(v) \geq n$，则G为哈密顿图当且仅当$G \cup (u,v)$为哈密顿图.