第十六章 树

- 主要内容
- 无向树及其性质
- 生成树
- 根树及其应用

16.1 无向树及其性质

定义16.1

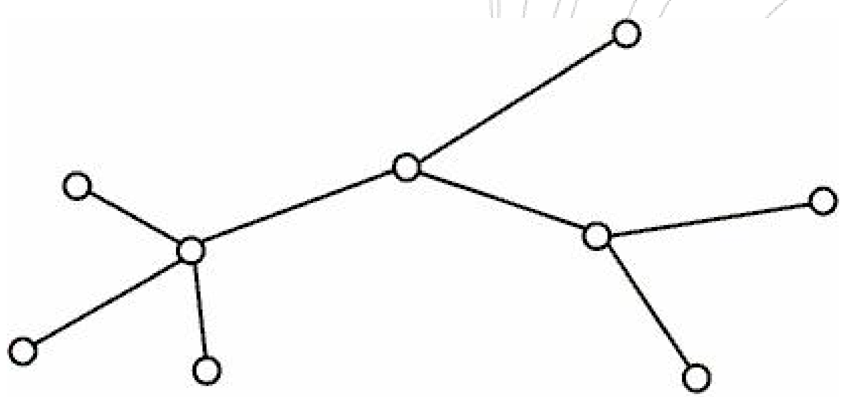
(1) 无向树——连通无回路的无向图

(2) 平凡树——平凡图

(3) 森林——至少由两个连通分支（每个都是树）组成

(4) 树叶——1度顶点

(5) 分支点——度数≥2的顶点



无向树的等价定义

定理16.1 设$G=<V,E>$是n阶m条边的无向图，则下面命题等价:

(1) G 是树

(2) G 中任意两个顶点之间存在惟一的路径.

(3) G 中无回路且 $m=n-1$.

(4) G 是连通的且 $m=n-1$.

(5) G 是连通的且 G 中任何边均为桥.

(6) G 中没有回路，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边，在所得图中得到惟一的一个含新边的圈.

无向树的性质

定理16.2 设T是n阶非平凡的无向树，则T中至少有两片树叶.

例题

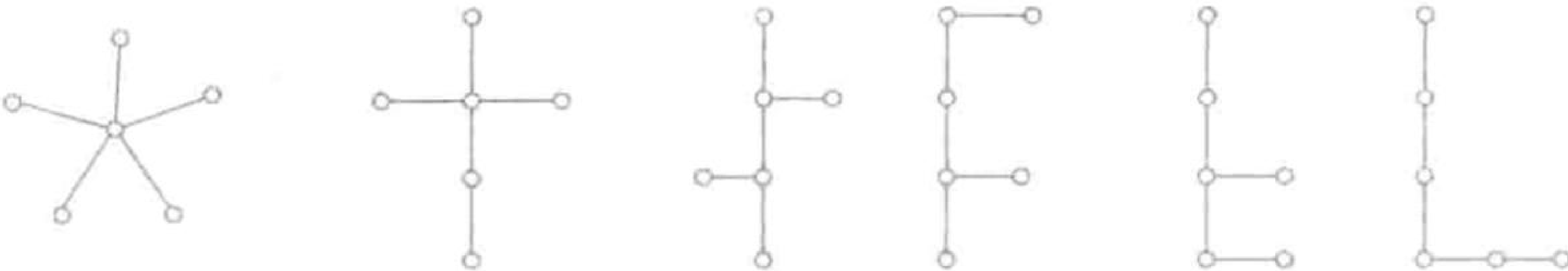
- **例1** 已知无向树T中有1个3度顶点，2个2度顶点，其余顶点全是树叶，试求树叶数，并画出满足要求的非同构的无向树.

例题

- **例2** 已知无向树T有5片树叶，2度与3度顶点各1个，其余顶点的度数均为4，求T的阶数n，并画出满足要求的所有非同构的无向树.

例题

P330, 例16.1 画出所有6阶非同构的无向数.



T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_6

16.2 生成树

定义16.2 设G为无向图

(1) G的树——T 是G 的子图并且是树

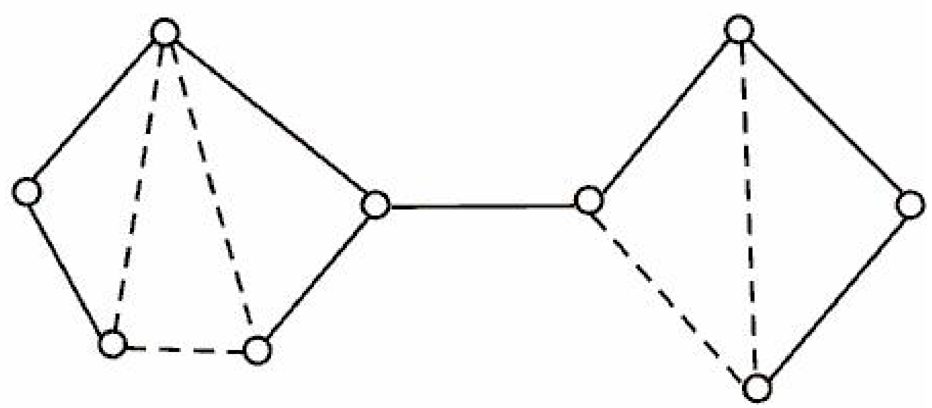
(2) G的生成树——T 是G 的生成子图并且是树

(3) 生成树T的树枝——T 中的边

(4) 生成树T的弦——不在T 中的边

(5) 生成树T的余树 $\overline{T}$ ——全体弦组成的集合的导出子图

$\overline{T}$ 不一定连通，也不一定不含回路，如图所示



生成树存在条件

定理16.3 无向图G具有生成树当且仅当G连通.

证 必要性显然.

充分性用破圈法（注意：在圈上删除任何一条边，不破坏连通性)

生成树存在条件

推论1 G为n阶m条边的无向连通图，则$m \geq n-1$.

推论2 $\overline{T}$ 的边数为$m-n+1$. （因为T的边数是n-1.)

推论3 $\overline{T}$ 为G的生成树T的余树，C为G中任意一个圈，则C与 $\overline{T}$一定有公共边.

基本回路系统

定理16.4 设T为G的生成树，e为T的任意一条弦，则$T\cup e$中含一个只有一条弦其余边均为T的树枝的圈. 不同的弦对应的圈也不同.

基本回路系统

定义16.3 设T是n阶m条边的无向连通图G的一棵生成树，设e'_1, e'_2, …, e'_{m-n+1}为T的弦. 设C_r为T添加弦e'_r产生的只含弦e'_r、其余边均为树枝的圈.

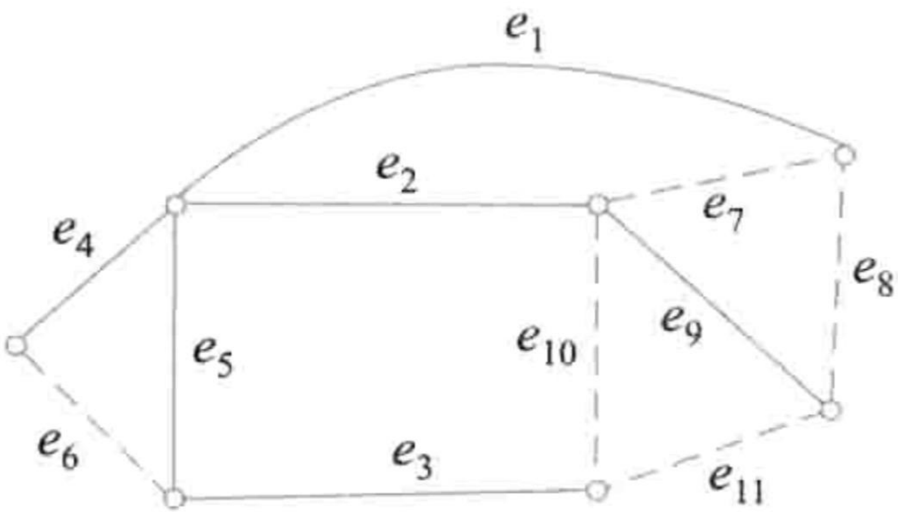
(1) 称C_r为G的对应树T的弦e'_r的基本回路或基本圈，r=1, 2, …, $m-n+1$.

(2) 并称$\{C_1, C_2, …, C_{m-n+1}\}$为$G$对应$T$的基本回路系统，称$m-n+1$为$G$的圈秩，记作 $\xi(G)$.

基本回路系统

求基本回路的算法：设弦$e=(u,v)$，先求T中u到v的路径Γ_{uv}，再并上弦e，即得对应e的基本回路.

（参考P332 例题！）



基本回路系统

总结:

- 对于一个n阶m条边的无向连通图G， 其生成树记作T,
- 每条弦都与部分树枝构成圈，称为基本回路，或者基本圈。
- 总共有m-n+1个基本圈，组合在一起，称为基本回路系统。
- m-n+1=圈秩，记作 $\xi(G)$

基本割集的存在

定理16.5 设T是连通图G的一棵生成树，e为T的树枝，则G中存在只含树枝e，其余边都是弦的割集，且不同的树枝对应的割集也不同.

基本割集与基本割集系统

定义16.4 设T是n阶连通图G的一棵生成树，$e'_1, e'_2, \ldots, e'_{n-1}$为$T$的树枝，$S_i$是$G$的只含树枝$e'_i$的割集，则称$S_i$为$G$的对应于生成树$T$由树枝$e'_i$生成的基本割集，$i=1, 2, \ldots, n-1$.

并称$\{S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}\}$为$G$对应$T$的基本割集系统,

称$n-1$为G的割集秩，记作$\eta(G)$.

基本割集与基本割集系统

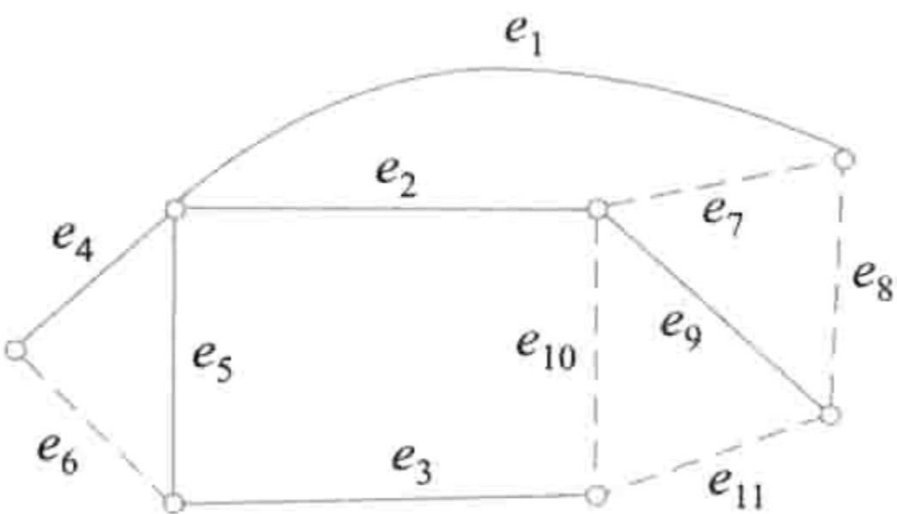
求基本割集的算法:

设e'为生成树T的树枝, $T-e'$为两棵小树T_1与T_2, 令

$$S_{e'}=\{e\mid e\in E(G)\text{且}e\text{的两个端点分别属于}T_1\text{与}T_2\}$$

则$S_{e'}$为e'对应的基本割集.

(参考P332 例题!)



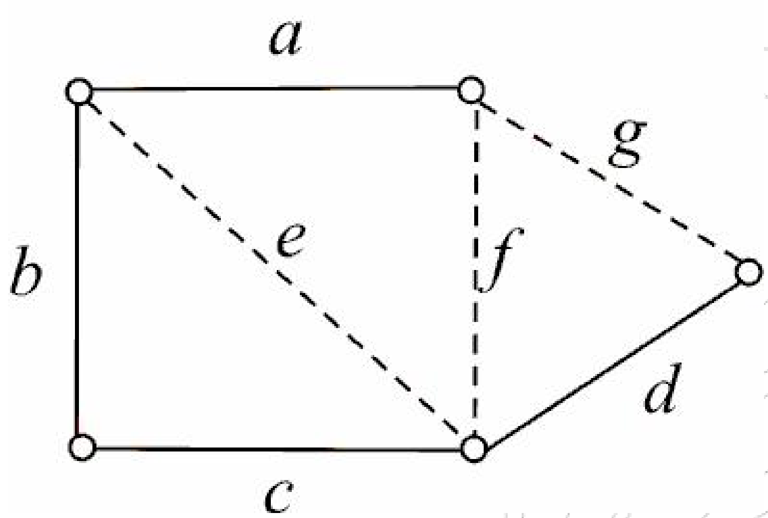
基本割集与基本割集系统

总结:

- 对于一个n阶m条边的无向连通图G， 其生成树记作T，
- 每条边都与部分弦构成割集，称为基本割集。
- 总共有n-1个基本割集，组合在一起，称为基本割集系统。
- n-1=割集秩，记作$\eta(G)$.

实例

例3 图5实线边所示为生成树，求基本回路系统与基本割集系统



最小生成树

定义16.5 T是$G=<V,E,W>$的生成树

(1) $W(T)$——T各边权之和

(2) **最小生成树**——G的所有生成树中权最小的

求最小生成树的一个算法

避圈法（Kruskal）设$G=<V,E,W>$，将G中非环边按权从小到大排序：$e_1, e_2, \ldots, e_m$.

(1) 取e_1在T中

(2) 查e_2，若e_2与e_1不构成回路，取e_2也在T 中，否则弃e_2.

(3) 再查$e_3,\ldots,$ 直到得到生成树为止.

实例

例4 求图的一棵最小生成树.