7.3 关系的运算

关系的基本运算

定义7.6 关系的**定义域**、**值域**与**域**分别定义为

$$\mathrm{dom}R = \{ x \mid \exists y (<x,y> \in R) \}$$

$$\mathrm{ran}R = \{ y \mid \exists x (<x,y> \in R) \}$$

$$\mathrm{fld}R = \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R$$

例5 $R=\{<1,2>,<1,3>,<2,4>,<4,3>\}$, 则

$\mathrm{dom}R=$

$\mathrm{ran}R=$

$\mathrm{fld}R=$

关系运算(逆与合成)

定义7.7 关系的逆运算

$$R^{-1} = \{ \langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R \}$$

定义7.8 关系的合成运算

$$R \circ S = \{ \langle x, z\rangle \mid \exists\, y\, (\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in S) \}$$

例6 $R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle\}$

$S = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

$R^{-1} =$

$R \circ S =$

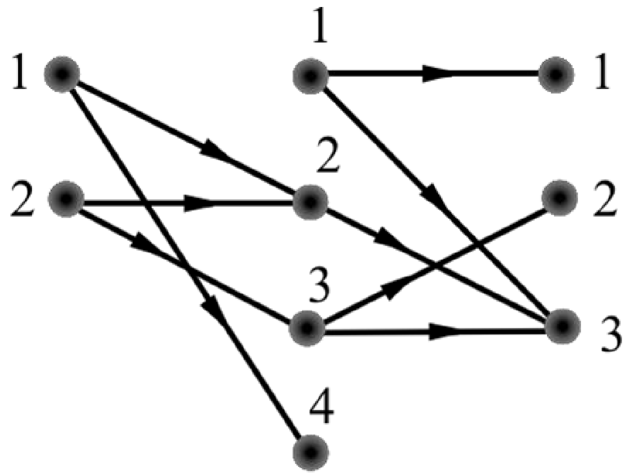
$S \circ R =$

合成的图示法

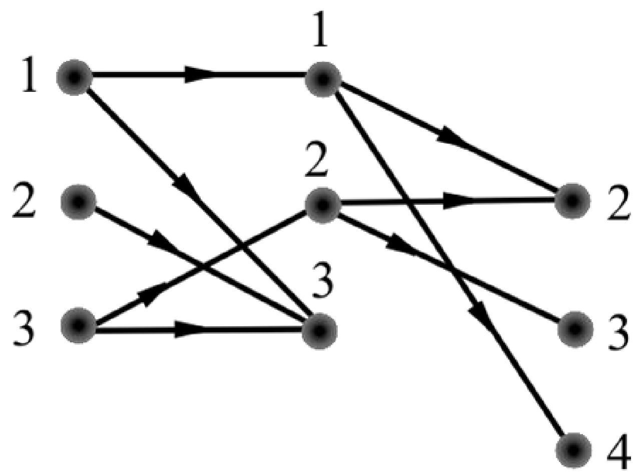
利用图示（不是关系图）方法求合成

$R\circ S$ ={<1,3>, <2,2>, <2,3>}

$S\circ R$ ={<1,2>, <1,4>, <3,2>, <3,3>}



$R\circ S$



$S\circ R$

关系运算(限制与像)

定义7.9 设R为二元关系, A是集合

(1) R在A上的**限制**记作 $R\restriction A$, 其中

$$R\restriction A = \{ \langle x,y\rangle \mid xRy \wedge x\in A \}$$

(2) A在R下的**像**记作$R[A]$, 其中

$$R[A]=\mathrm{ran}(R\restriction A)$$

说明:

- R在A上的限制 $R\restriction A$是 R 的子关系， 即 $R\restriction A \subseteq R$
- A在R下的像 $R[A]$ 是 $\mathrm{ran}R$ 的子集， 即 $R[A]\subseteq \mathrm{ran}R$

实例

例7 设R={<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,4>,<3,2>}, 则

$R\upharpoonright\{1\} =$

$R\upharpoonright\varnothing =$

$R\upharpoonright\{2,3\} =$

$R[\{1\}] =$

$R[\varnothing] =$

$R[\{3\}] =$

关系运算的性质

定理7.1 设F是任意的关系, 则

(1) $(F^{-1})^{-1}=F$

(2) $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$, $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$

关系运算的性质

定理7.2 设F, G, H是任意的关系, 则

(1) $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

(2) $(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$

关系运算的性质

定理7.3 设R为A上的关系, 则

$$R\circ I_A = I_A\circ R = R$$

关系运算的性质

定理7.4

(1) $F\circ(G\cup H) = F\circ G \cup F\circ H$ (2) $(G\cup H)\circ F = G\circ F \cup H\circ F$

(3) $F\circ(G\cap H) \subseteq F\circ G\cap F\circ H$ (4) $(G\cap H)\circ F \subseteq G\circ F\cap H\circ F$

关系运算的性质

练习:

(1) $F\circ(G\cup H) = F\circ G\cup F\circ H$

证:

推广

定理7.4 的结论可以推广到有限多个关系

$$R\circ(R_1\cup R_2\cup \ldots \cup R_n) = R\circ R_1\cup R\circ R_2\cup \ldots \cup R\circ R_n$$

$$(R_1\cup R_2\cup \ldots \cup R_n)\circ R = R_1\circ R\cup R_2\circ R\cup \ldots \cup R_n\circ R$$

$$R\circ(R_1\cap R_2\cap \ldots \cap R_n) \subseteq R\circ R_1\cap R\circ R_2\cap \ldots \cap R\circ R_n$$

$$(R_1\cap R_2\cap \ldots \cap R_n)\circ R \subseteq R_1\circ R\cap R_2\circ R\cap \ldots \cap R_n\circ R$$

关系运算的性质

定理7.5 设F 为关系, A, B为集合, 则

(1) $F\restriction(A\cup B) = F\restriction A\cup F\restriction B$

(2) $F[A\cup B] = F[A]\cup F[B]$

(3) $F\restriction(A\cap B) = F\restriction A\cap F\restriction B$

(4) $F[A\cap B] \subseteq F[A]\cap F[B]$

证明

证 只证 (1) 和 (4).

(1) $F\restriction(A\cup B)=F\restriction A\cup F\restriction B$

证明

(4) $F[A\cap B] \subseteq F[A]\cap F[B]$

关系的幂运算

定义7.10

设 R 为 A 上的关系, n为自然数, 则 R 的 n 次幂定义为:

(1) $R^0 = \{ <x,x> \mid x \in A \} = I_A$

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$

注意:

- 对于A上的任何关系 R_1 和 R_2 都有 $R_1^0 = R_2^0 = I_A$
- 对于A上的任何关系 R 都有 $R^1 = R$

幂的求法

例 8 设$A = \{a,b,c,d\}$, $R = \{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>\}$,
求R的各次幂, 分别用矩阵和关系图表示.

幂运算的性质

定理7.6 设 A 为 n 元集, R 是A上的关系, 则存在自然数 s 和 t, 使得 $R^s = R^t$.

证 R 为A上的关系,

由于$|A|=n$, A上的不同关系只有 2^{n^2}个.

列出 R 的各次幂

$$R^0, R^1, R^2, \ldots, R^{2^{n^2}}, \ldots,$$

必存在自然数 s 和 t 使得 $R^s = R^t$

幂运算的性质

定理7.7 设 R 是 A上的关系， $m, n \in \mathrm{N}$, 则

(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$

(2) $(R^m)^n = R^{mn}$

幂运算的性质

定理7.8 设R 是A上的关系,

若存在自然数 s, t $(s<t)$ 使得 $R^s=R^t$, 则

(1) 对任何 $k\in$ N有 $R^{s+k} = R^{t+k}$

(2) 对任何 $k, i\in$ N有 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$, 其中 $p = t-s$

(3) 令$S = \{R^0,R^1,\ldots,R^{t-1}\}$, 则对于任意的 $q\in$ N 有$R^q\in$ S