



7.4 关系的性质

定义7.11 设 R 为 A 上的关系,

- (1) 若 $\forall x(x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \in R)$, 则称 R 在 A 上是**自反的**.
- (2) 若 $\forall x(x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \notin R)$, 则称 R 在 A 上是**反自反的**.

实例:

自反: 全域关系 E_A , 恒等关系 I_A , 小于等于关系 L_A , 整除关系 D_A

反自反: 实数集上的小于关系、幂集上的真包含关系.

$A = \{1, 2, 3\}$, R_1, R_2, R_3 是 A 上的关系, 其中

$$R_1 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$$

$$R_2 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$$

$$R_3 = \{\langle 1, 3 \rangle\}$$

R_2 自反, R_3 反自反, R_1 既不是自反的也不是反自反的.



对称性与反对称性

定义7.12 设 R 为 A 上的关系,

(1) 若 $\forall x \forall y (x, y \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \in R)$, 则称 R 为 A 上**对**称的关系.

(2) 若 $\forall x \forall y (x, y \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \rightarrow x = y)$, 则称 R 为 A 上的**反对称**关系.

实例: 对称关系: A 上的全域关系 E_A , 恒等关系 I_A 和空关系 \emptyset

反对称关系: 恒等关系 I_A 和空关系也是 A 上的反对称关系.

设 $A = \{1, 2, 3\}$, R_1, R_2, R_3 和 R_4 都是 A 上的关系, 其中

$$R_1 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}, \quad R_2 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$$

$$R_3 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}, \quad R_4 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$$

R_1 : 对称和反对称;

R_2 : 只有对称;

R_3 : 只有反对称;

R_4 : 不对称、不反对称

定义7.13 设 R 为 A 上的关系, 若

$$\forall x \forall y \forall z (x, y, z \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \rightarrow \langle x, z \rangle \in R),$$

则称 R 是 A 上的**传递**关系.

实例: A 上的全域关系 E_A , 恒等关系 I_A 和空关系 \emptyset , 小于等于和小于关系, 整除关系, 包含与真包含关系

设 $A = \{1, 2, 3\}$, R_1, R_2, R_3 是 A 上的关系, 其中

$$R_1 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$$

$$R_2 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$$

$$R_3 = \{\langle 1, 3 \rangle\}$$

R_1 和 R_3 是 A 上的传递关系,

R_2 不是 A 上的传递关系.

关系性质成立的充要条件



定理7.9 设 R 为 A 上的关系, 则

- (1) R 在 A 上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$
- (2) R 在 A 上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \emptyset$
- (3) R 在 A 上对称当且仅当 $R = R^{-1}$
- (4) R 在 A 上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$
- (5) R 在 A 上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$



关系性质的三种等价条件

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \emptyset$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若 $r_{ij} = 1$, 且 $i \neq j$, 则 $r_{ji} = 0$	M^2 中1位置, M 中相应位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	两点之间有边, 是一对方向相反的边	两点之间有边, 是一条有向边	点 x_i 到 x_j 有边, x_j 到 x_k 有边, 则 x_i 到 x_k 也有边

关系的性质和运算之间的联系



	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R_1^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×