7.5 关系的闭包

主要内容

- 闭包定义
- 闭包的构造方法

  集合表示

  矩阵表示

  图表示
- 闭包的性质

闭包定义

定义7.14 设R是非空集合A上的关系, R的自反(对称或传递)闭包是A上的关系R', 使得R'满足以下条件:

(1) R'是自反的(对称的或传递的)

(2) $R \subseteq R'$

(3) 对A上任何包含R的自反(对称或传递)关系R'' 有$R' \subseteq R''$

R的自反闭包记作$r(R)$, 对称闭包记作$s(R)$, 传递闭包记作$t(R)$.

定理7.10 设R为A上的关系, 则有

(1) $r(R)=R \cup R^0$

(2) $s(R)=R \cup R^{-1}$

(3) $t(R)=R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

说明：对有穷集$A(|A|=n)$上的关系, (3)中的并最多不超过R^n

闭包的矩阵表示和图表示

设关系R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系矩阵分别为M, M_r , M_s 和 M_t

则　　$M_r=M+E$　　　$M_s=M+M'$　　　$M_t=M+M^2+M^3+\ldots$

E 是单位矩阵, M'是 转置矩阵，相加时使用逻辑加.

设关系R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图分别记为G, G_r, G_s, G_t, 则G_r , G_s , G_t 的顶点集与G 的顶点集相等. 除了G 的边以外, 以下述方法添加新的边:

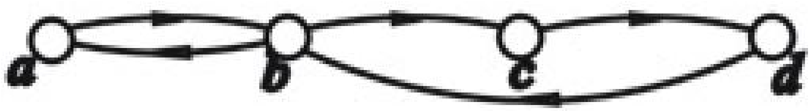
(1) 考察G 的每个顶点, 若没环就加一个环，得到G_r

(2) 考察G 的每条边, 若有一条 x_i 到 x_j 的单向边, $i\neq j$, 则在G 中加一条 x_j 到 x_i 的反向边，得到G_s

(3) 考察G 的每个顶点 x_i, 找 x_i 可达的所有顶点 x_j (允许$i=j$), 如果没有从 x_i 到 x_j 的边, 就加上这条边, 得到图G_t

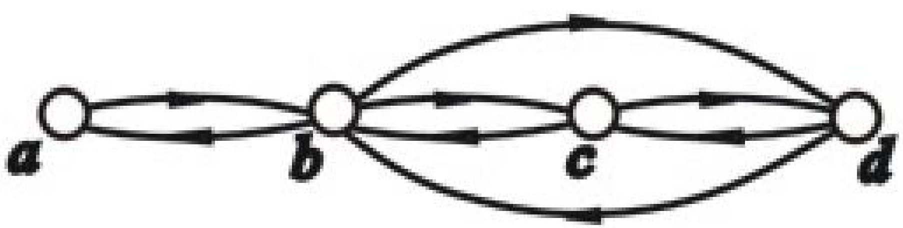
实例

例9 设$A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,b\rangle\}$, R和$r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图如下图所示.

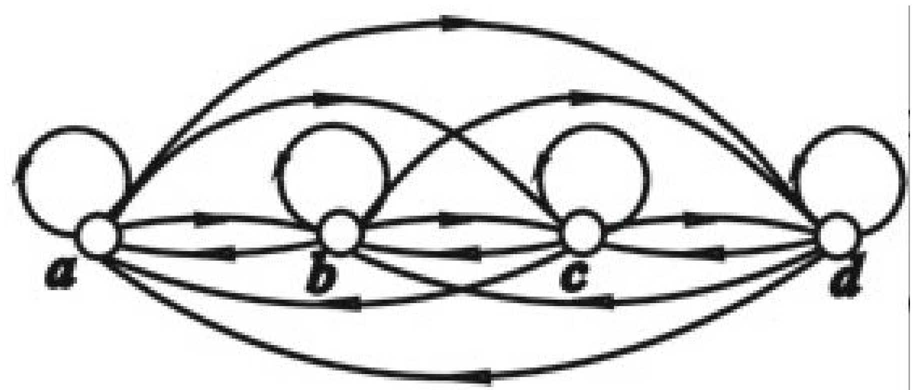


R

$r(R)$



$s(R)$



$t(R)$

闭包的性质

定理7.11 设R是非空集合A上的关系, 则

(1) R是自反的当且仅当 $r(R)=R$.

(2) R是对称的当且仅当 $s(R)=R$.

(3) R是传递的当且仅当 $t(R)=R$.

定理7.12 设R_1和R_2是非空集合A上的关系, 且 $R_1 \subseteq R_2$, 则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$

(2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

证明 略

闭包的性质

定理7.13 设R是非空集合A上的关系,

(1) 若R是自反的, 则 $s(R)$ 与 $t(R)$ 也是自反的

(2) 若R是对称的, 则 $r(R)$ 与 $t(R)$ 也是对称的

(3) 若R是传递的, 则 $r(R)$ 是传递的.

说明：如果需要进行多个闭包运算，比如求R的自反、对称、传递的闭包 $tsr(R)$，运算顺序如下：

$$tsr(R) = rts(R) = trs(R)$$

证明 略