



7.6 等价关系与划分

主要内容

- 等价关系的定义与实例
- 等价类及其性质
- 商集与集合的划分
- 等价关系与划分的一一对应

等价关系的定义与实例



定义7.15 设 R 为非空集合上的关系. 如果 R 是自反的、对称的和传递的, 则称 R 为 A 上的**等价关系**. 设 R 是一个等价关系, 若 $\langle x, y \rangle \in R$, 称 **x 等价于 y** , 记做 $x \sim y$.

实例 设 $A = \{1, 2, \dots, 8\}$, 如下定义 A 上的关系 R :

$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \equiv y \pmod{3} \}$$

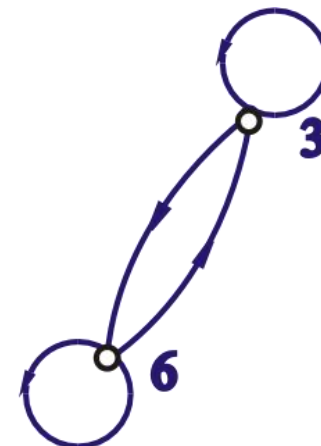
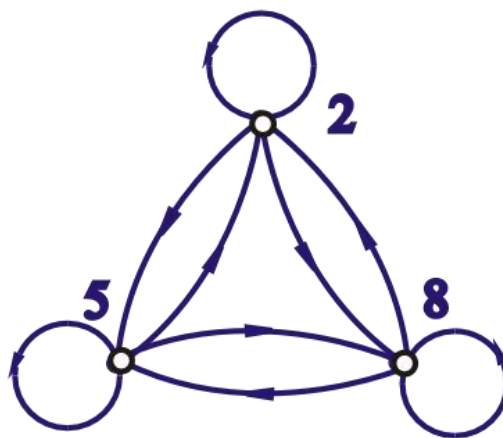
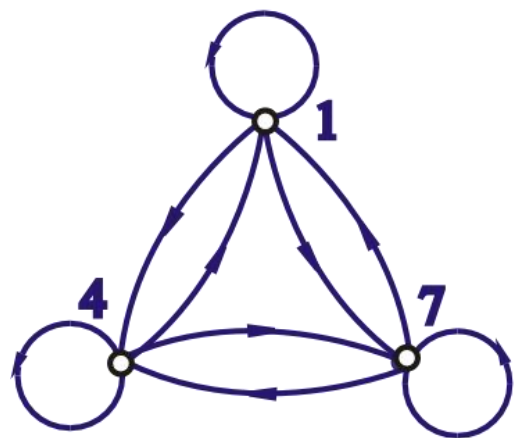
其中 $x \equiv y \pmod{3}$ 叫做 **x 与 y 模3相等**, 即 x 除以3的余数与 y 除以3的余数相等. 不难验证 R 为 A 上的等价关系, 因为

(1) $\forall x \in A$, 有 $x \equiv x \pmod{3}$

(2) $\forall x, y \in A$, 若 $x \equiv y \pmod{3}$, 则有 $y \equiv x \pmod{3}$

(3) $\forall x, y, z \in A$, 若 $x \equiv y \pmod{3}$, $y \equiv z \pmod{3}$, 则有 $x \equiv z \pmod{3}$

等价关系的实例



模 3 等价关系的关系图



等价类定义

定义7.16 设 R 为非空集合 A 上的等价关系, $\forall x \in A$, 令

$$[x]_R = \{y \mid y \in A \wedge xRy\}$$

称 $[x]_R$ 为 x 关于 R 的等价类, 简称为 x 的**等价类**, 简记为 $[x]$ 或 \bar{x}

实例 $A = \{1, 2, \dots, 8\}$ 上模3等价关系的等价类:

$$[1] = [4] = [7] = \{1, 4, 7\}$$

$$[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\}$$

$$[3] = [6] = \{3, 6\}$$

定理7.14 设 R 是非空集合 A 上的等价关系, 则

- (1) $\forall x \in A$, $[x]$ 是 A 的非空子集
- (2) $\forall x, y \in A$, 如果 xRy , 则 $[x] = [y]$
- (3) $\forall x, y \in A$, 如果 $x \not R y$, 则 $[x]$ 与 $[y]$ 不交
- (4) $\cup \{[x] \mid x \in A\} = A$



商集与划分

定义7.17 设 R 为非空集合 A 上的等价关系, 以 R 的所有等价类作为元素的集合称为 A 关于 R 的**商集**, 记做 A/R ,

$$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$$

实例 设 $A = \{1, 2, \dots, 8\}$, A 关于模3等价关系 R 的商集为

$$A/R = \{\{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6\}\}$$

A 关于恒等关系和全域关系的商集为:

$$A/I_A = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{8\}\}, \quad A/E_A = \{\{1, 2, \dots, 8\}\}$$

定义7.18 设 A 为非空集合, 若 A 的子集族 $\pi (\pi \subseteq P(A))$ 满足:

- (1) $\emptyset \notin \pi$
- (2) $\forall x \forall y (x, y \in \pi \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset)$
- (3) $\cup \pi = A$

则称 π 是 A 的一个**划分**, 称 π 中的元素为 A 的**划分块**.

例10 设 $A = \{ a, b, c, d \}$, 给定 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6$ 如下:

$$\pi_1 = \{ \{ a, b, c \}, \{ d \} \}$$

$$\pi_2 = \{ \{ a, b \}, \{ c \}, \{ d \} \}$$

$$\pi_3 = \{ \{ a \}, \{ a, b, c, d \} \}$$

$$\pi_4 = \{ \{ a, b \}, \{ c \} \}$$

$$\pi_5 = \{ \emptyset, \{ a, b \}, \{ c, d \} \}$$

$$\pi_6 = \{ \{ a, \{ a \} \}, \{ b, c, d \} \}$$

则 π_1 和 π_2 是 A 的划分, 其他都不是 A 的划分.

例11 给出 $A = \{1,2,3\}$ 上所有的等价关系