7.7 偏序关系

主要内容

- 偏序关系

  偏序关系的定义

  偏序关系的实例
- 偏序集与哈斯图
- 偏序集中的特殊元素及其性质

  极大元、极小元、最大元、最小元

  上界、下界、最小上界、最大下界

定义与实例

定义7.19

偏序关系：非空集合A上的自反、反对称和传递的关系, 记作$\preccurlyeq$. 设$\preccurlyeq$为偏序关系, 如果 $<x, y> \in \preccurlyeq$, 则记作 $x \preccurlyeq y$, 读作 x"小于或等于" y.

实例

集合A上的恒等关系 I_A是 A上的偏序关系.

小于或等于关系, 整除关系和包含关系也是相应集合上的偏序关系.

相关概念

定义7.20 设 R 为非空集合A上的偏序关系,

(1) $x, y \in A$, x与y可比 $\Leftrightarrow$ $x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$

(2) 任取元素 x 和 y, 可能有下述几种情况发生:

$x \prec y$ (或 $y \prec x$), $x = y$, x与y不是可比的

定义7.21 R 为非空集合A上的偏序关系,

(1) $\forall x,y \in A$, x与y都是可比的，则称R为全序（或线序）

实例：数集上的小于或等于关系是全序关系,整除关系不是正整数集合上的全序关系

定义7.22 $x,y \in A$, 如果 $x \prec y$ 且不存在 $z \in A$ 使得 $x \prec z \prec y$, 则称 y 覆盖x.

例如{1,2,4,6}集合上整除关系, 2覆盖1, 4和6覆盖2, 4不覆盖1.

偏序集与哈斯图

定义7.23 集合A和A上的偏序关系$\preccurlyeq$一起叫做**偏序集**, 记作$<A,\preccurlyeq>$.

实例： $<Z,\leq>$, $<P(A),R_{\subseteq}>$

哈斯图: 利用偏序关系的自反、反对称、传递性进行简化的关系图

特点:

(1) 每个结点没有环

(2) 两个连通的结点之间的序关系通过结点位置的高低表示，位置低的元素的顺序在前

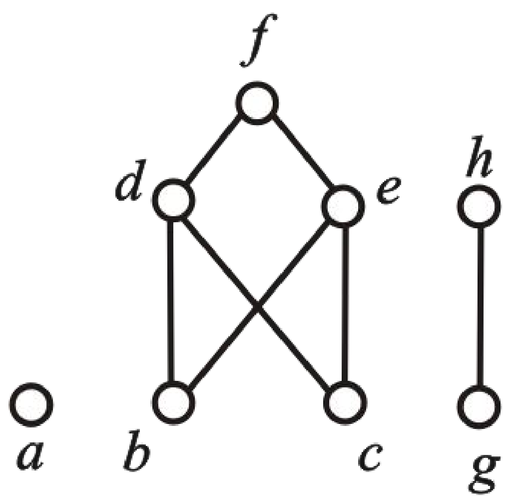
(3) 具有覆盖关系的两个结点之间连边

实例

例12 偏序集<{1,2,3,4,5,6,7,8,9}, $R_{整除}$>和<$P(\{a,b,c\}),R_{\subseteq}$>的哈斯图.

实例

例13 已知偏序集<*A*,*R*>的哈斯图如下图所示, 试求出集合*A*和关系*R*的表达式.



偏序集中的特殊元素

定义7.24 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in B$

(1) 若$\forall x(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$成立, 则称 y 为B的最小元

(2) 若$\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$成立, 则称 y 为B的最大元

(3) 若$\forall x(x\in B\wedge x\preccurlyeq y\rightarrow x=y)$成立, 则称 y 为B的极小元

(4) 若$\forall x(x\in B\wedge y\preccurlyeq x\rightarrow x=y)$成立, 则称 y 为B的极大元

性质:

(1) 对于有穷集, 极小元和极大元一定存在, 可能存在多个.

(2) 最小元和最大元不一定存在, 如果存在一定惟一.

(3) 最小元一定是极小元; 最大元一定是极大元.

(4) 孤立结点既是极小元, 也是极大元.

偏序集中的特殊元素

定义7.25 设$<A, \preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in A$

(1) 若$\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$成立, 则称$y$为$B$的上界

(2) 若$\forall x(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$成立, 则称$y$为$B$的下界

(3) 令$C = \{y \mid y$为B的上界$\}$, C的最小元为B的最小上界或上确界

(4) 令$D = \{y \mid y$为B的下界$\}$, D的最大元为B的最大下界或下确界

性质:

(1) 下界、上界、下确界、上确界不一定存在

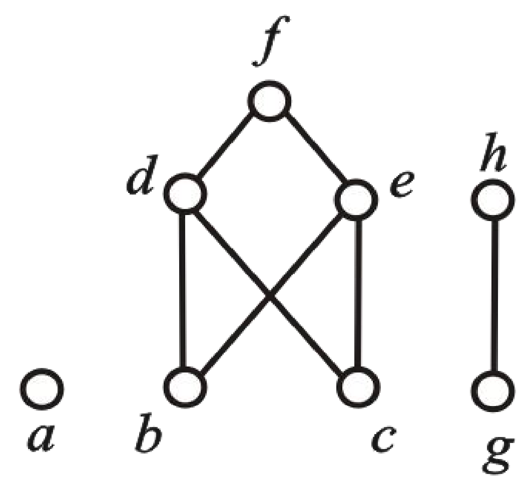
(2) 下界、上界存在不一定惟一

(3) 下确界、上确界如果存在，则惟一

(4) 集合的最小元是其下确界，最大元是其上确界；反之不对.

实例

例14 设偏序集$<A,\preccurlyeq>$，求A的极小元、最小元、极大元、最大元，设$B=\{b,c,d\}$, 求B的下界、上界、下确界、上确界.



实例

例15 设X为集合, $A = P(X) - \{\varnothing\} - \{X\}$, 且$A \neq \varnothing$. 若$|X|=n$, $n \geq 2$. 问:

(1) 偏序集 $\langle A, R_{\subseteq} \rangle$ 是否存在最大元?

(2) 偏序集 $\langle A, R_{\subseteq} \rangle$ 是否存在最小元?

(3) 偏序集 $\langle A, R_{\subseteq} \rangle$ 中极大元和极小元的一般形式是什么? 并说明理由.