第三部分 代数结构

- 主要内容
  - 代数系统----二元运算及其性质、代数系统和子代数
  - 半群与群----半群、独异点、群
  - 环与域-----环、整环、域
  - 格与布尔代数----格、布尔代数

第九章 代数系统

主要内容

- 二元运算及其性质
  - 一元和二元运算定义及其实例
  - 二元运算的性质
- 代数系统
  - 代数系统定义及其实例
  - 子代数
  - 积代数
- 代数系统的同态与同构

9.1 二元运算及其性质

定义9.1 设S为集合，函数 f：$S\times S\to S$ 称为S上的二元运算，简称为二元运算．S中任何两个元素都可以进行运算，且运算的结果惟一．S中任何两个元素的运算结果都属于S，即S对该运算封闭．

例1 (1) 自然数集合N上的加法和乘法是N上的二元运算，但减法和除法不是.

(2) 整数集合Z上的加法、减法和乘法都是Z上的二元运算，而除法不是.

(3) 非零实数集R*上的乘法和除法都是R*上的二元运算，而加法和减法不是.

实例

(4) 设M_n(R)表示所有n 阶(n≥2)实矩阵的集合，即

$$M_n(R)=\left\{\left.\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\right| a_{ij}\in R,\ i,j=1,2,\ldots,n\right\}$$

则矩阵加法和乘法都是M_n(R)上的二元运算.

(5) S为任意集合，则∪、∩、－、⊕ 为$P(S)$上二元运算.

(6) S^S为S上的所有函数的集合，则两个函数的复合运算∘为S^S上的二元运算.

一元运算的定义与实例

定义9.2 设S为集合， 函数 $f:S\to S$ 称为S上的一元运算，简称一元运算.

例2 (1) 求相反数是整数集合Z,有理数集合Q和实数集合R上的一元运算

(2) 求倒数是非零有理数集合Q*,非零实数集合R*上一元运算

(3) 求共轭复数是复数集合C上的一元运算

一元运算的定义与实例

(4) 在幂集$P(S)$上规定全集为S，则求绝对补运算~是$P(S)$上的一元运算.

(5) 设S为集合，令A为S上所有双射函数的集合，$A \subseteq S^S$，求一个双射函数的反函数为A上的一元运算.

(6) 在$n(n \geq 2)$阶实矩阵的集合$M_n(\mathrm{R})$上，求转置矩阵是$M_n(R)$上的一元运算.

二元与一元运算的表示

1. 算符

可以用∘, *, · , ⊕, ⊗, Δ 等符号表示二元或一元运算，称为算符.

对二元运算∘，如果 x 与 y 运算得到 z，记做 $x \circ y = z$

对一元运算Δ, x的运算结果记作Δx.

2. 表示二元或一元运算的方法: 解析公式和运算表公式表示

例 设R为实数集合，如下定义R上的二元运算*:

$$\forall x, y \in R,\ x * y = x.$$

那么 3*4 = 3，0.5*(–3) = 0.5

运算表

运算表：表示有穷集上的一元和二元运算

$\circ$	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
a_1	$a_1 \circ a_1$	$a_1 \circ a_2$	$\cdots$	$a_1 \circ a_n$
a_2	$a_2 \circ a_1$	$a_2 \circ a_2$	$\cdots$	$a_2 \circ a_n$
.		$\cdots$		
.		$\cdots$		
.		$\cdots$		
a_n	$a_n \circ a_1$	$a_n \circ a_2$	$\cdots$	$a_n \circ a_n$

二元运算的运算表

	$\circ a_i$
a_1	$\circ a_1$
a_2	$\circ a_2$
.	.
.	.
.	.
a_n	$\circ a_n$

一元运算的运算表

运算表的实例

例3 设 $S=P(\{a,b\})$，S上的⊕和 ~运算的运算表如下

⊕	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\varnothing$	$\{a.b\}$	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\varnothing$	$\{a\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\varnothing$

x	$\sim x$
$\varnothing$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$
$\{b\}$	$\{b\}$
$\{a,b\}$	$\varnothing$

二元运算的性质

定义9.3 设$\circ$为S上的二元运算,

(1) 若对任意$x,y\in S$ 有 $x\circ y=y\circ x$, 则称运算在S上满足**交换律**.

(2) 若对任意$x,y,z\in S$有 $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$, 则称运算在$S$上满足**结合律**.

(3) 若对任意$x\in S$ 有 $x\circ x=x$, 则称运算在S上满足**幂等律**.

定义9.4 设$\circ$和$*$为S上两个不同的二元运算,

(1) 若对任意$x,y,z\in S$有 $(x*y)\circ z=(x\circ z)*(y\circ z)$,

$z\circ(x*y)=(z\circ x)*(z\circ y)$, 则称$\circ$运算对$*$运算满足**分配律**.

(2) 若$\circ$和$*$都可交换,且对任意$x,y\in S$有 $x\circ(x*y)=x$, $x*(x\circ y)=x$,

则称$\circ$和$*$运算满足**吸收律**.

实例

Z, Q, R分别为整数、有理数、实数集；$M_n(R)$为n阶实矩阵集合, $n\geq 2$；$P(B)$为幂集；A^A为从A到A的函数集， $|A|\geq 2$

集合	运算	交换律	结合律	幂等律
Z,Q,R	普通加法+ 普通乘法×	有 有	有 有	无 无
$M_n(R)$	矩阵加法+ 矩阵乘法×	有 无	有 有	无 无
$P(B)$	并∪ 交∩ 相对补− 对称差⊕	有 有 无 有	有 有 无 有	有 有 无 无
A^A	函数复合°	无	有	无

实例

Z, Q, R分别为整数、有理数、实数集；$M_n(R)$为n阶实矩阵集合, $n≥2$；$P(B)$为幂集；A^A为从A到A的函数集，$|A|≥2$

集合	运算	分配律	吸收律
Z,Q,R	普通加法+与乘法×	×对+可分配 +对×不分配	无
$M_n(R)$	矩阵加法+与乘法×	×对+可分配 +对×不分配	无
$P(B)$	并∪与交∩	∪对∩可分配 ∩对∪可分配	有
	交∩与对称差⊕	∩对⊕可分配	无

特异元素：单位元、零元

定义9.5 设$\circ$为S上的二元运算,

(1) 如果存在e_l(或e_r)$\in S$，使得对任意 $x \in S$ 都有

$$e_l \circ x = x \quad (\text{或 } x \circ e_r = x),$$

则称e_l(或e_r)是S中关于$\circ$运算的左(或右)单位元.

若$e \in S$关于$\circ$运算既是左单位元又是右单位元，则称e为S上关于$\circ$运算的单位元. 单位元也叫做幺元.

特异元素：单位元、零元

(2) 如果存在θ_l(或θ_r) $\in S$，使得对任意 $x \in S$ 都有

$$\theta_l \circ x = \theta_l \text{ (或 } x \circ \theta_r = \theta r\text{)},$$

则称θ_l(或θ_r)是S 中关于$\circ$运算的左(或右)零元.

若$\theta \in S$ 关于$\circ$运算既是左零元又是右零元，则称θ为S上关于运算$\circ$的零元.

可逆元素和逆元

(3) 设$\circ$为S上的二元运算, 令e为S中关于运算$\circ$的单位元.

对于$x\in S$，如果存在y_l(或y_r)$\in S$使得

$$y_l\circ x=e\ （或 x\circ y_r=e）$$

则称y_l(或 y_r)是x的左逆元（或右逆元）.

关于$\circ$运算，若$y\in S$ 既是 x 的左逆元又是 x 的右逆元, 则称 y为x的逆元. 如果 x 的逆元存在，就称 x 是可逆的.

实例

集合	运算	单位元	零元	逆元
Z,Q,R	普通加法+ 普通乘法×	0 1	无 0	x逆元$-x$ x逆元x^{-1} ($x^{-1}\in$给定集合)
$M_n(R)$	矩阵加法+ 矩阵乘法×	n阶全0矩阵 n阶单位矩阵	无 n阶全0 矩阵	X逆元$-X$ X的逆元X^{-1} (X可逆)
$P(B)$	并$\cup$ 交$\cap$ 对称差$\oplus$	$\varnothing$ B $\varnothing$	B $\varnothing$ 无	$\varnothing$的逆元为$\varnothing$ B的逆元为B X的逆元为X

惟一性定理

定理9.1 设∘为S上的二元运算，e_l和e_r分别为S中关于运算的左和右单位元，则$e_l = e_r = e$为S上关于∘运算的惟一的单位元.

证:

注意: 当 $|S| \geq 2$，单位元与零元是不同的;
当 $|S| = 1$时，这个元素既是单位元也是零元.

惟一性定理

定理9.2 设∘为S上可结合的二元运算，e为该运算的单位元，对于$x\in S$ 如果存在左逆元 y_l 和右逆元 y_r，则有 $y_l = y_r= y$，且 y是 x 的惟一的逆元.

证：

说明：对于可结合的二元运算， 可逆元素 x 只有惟一的逆元， 记作 x^{-1}