9.2 代数系统

定义9.6 非空集合S和S上k个一元或二元运算$f_1,f_2,\ldots, f_k$组成的系统称为**代数系统**, 简称代数，记做$<S, f_1, f_2, \ldots, f_k>$.

实例:

(1)$<N, +>$,$<Z, +, \cdot>$,$<R, +, \cdot>$是代数系统，+和·分别表示普通加法和乘法.

9.2 代数系统

实例:

(2) $<M_n(R), +, \cdot>$是代数系统, $+$和$\cdot$分别表示 n 阶($n \geq 2$)实矩阵的加法和乘法.

(3) $<Z_n, \oplus, \otimes>$是代数系统, $Z_n = \{0,1,\ldots,n-1\}$, $\oplus$和$\otimes$分别表示模n的加法和乘法, 对于$x,y \in Z_n$, $x \oplus y=(x+y) \bmod n$, $x \otimes y=(xy) \bmod n$

(4) $<P(S), \cup, \cap, \sim>$是代数系统, $\cup$和$\cap$为并和交, $\sim$为绝对补

代数系统的成分与表示

构成代数系统的成分：

- 集合（也叫载体，规定了参与运算的元素）
- 运算（这里只讨论有限个二元和一元运算）
- 代数常数（通常是与运算相关的特异元素：如单位元等）

代数系统的成分与表示

研究代数系统时，如果把运算具有它的特异元素也作为系统的性质之一，那么这些特异元素可以作为系统的成分，叫做代数常数.

例如：代数系统$<Z,+,0>$：集合Z, 运算+, 代数常数0

代数系统$<P(S),\cup,\cap>$：集合$P(S)$, 运算$\cup$和$\cap$，无代数常数

代数系统的表示

(1) 列出所有的成分：集合、运算、代数常数（如果存在)

如$<Z,+,0>$, $<P(S),\cup,\cap>$

(2) 列出集合和运算，在规定系统性质时不涉及具有单位元的性质（无代数常数)

如$<Z,+>$, $<P(S),\cup,\cap>$

(3) 用集合名称简单标记代数系统

在前面已经对代数系统作了说明的前提下使用

如代数系统Z, $P(B)$

同类型与同种代数系统

定义9.7

(1) 如果两个代数系统中运算的个数相同，对应运算的元数相同，且代数常数的个数也相同，则称它们是同类型的代数系统.

(2) 如果两个同类型的代数系统规定的运算性质也相同，则称为同种的代数系统.

例如 V_1=<R, +, ·, 0, 1>, V_2=<M_n(R), +, ·, θ, E>, θ为 n 阶全0矩阵，E为 n 阶单位矩阵，V_3=<$P(B)$, ∪, ∩, ∅, B>

V_1, V_2, V_3是同类型的代数系统，它们都含有2个二元运算，2个代数常数.

V_1, V_2是同种的代数系统，V_1, V_2与V_3不是同种的代数系统

运算性质比较

V_1	V_2	V_3
+ 可交换、可结合 · 可交换、可结合 + 满足消去律 · 满足消去律 · 对 + 可分配 + 对 · 不可分配 + 与 · 没有吸收律	+ 可交换、可结合 · 可交换、可结合 + 满足消去律 · 不满足消去律 · 对 + 可分配 + 对 · 不可分配 + 与 · 没有吸收律	∪可交换、可结合 ∩可交换、可结合 ∪不满足消去律 ∩不满足消去律 ∩对∪可分配 ∪对∩可分配 ∪与∩满足吸收律

子代数系统

定义9.8 设$V=<S, f_1, f_2, \ldots, f_k>$是代数系统，$B$是$S$的非空子集，如果$B$对$f_1, f_2, \ldots, f_k$都是封闭的，且$B$和$S$含有相同的代数常数，则称$<B, f_1, f_2, \ldots, f_k>$是$V$的子代数系统，简称子代数. 有时将子代数系统简记为B.

实例

N是<Z, + >的子代数，N也是<Z, + ,0>的子代数

N−{0}是<Z, + >的子代数，但不是<Z, + ,0>的子代数

说明:

- 子代数和原代数是同种的代数系统
- 对于任何代数系统$V=<S, f_1, f_2, \ldots, f_k>$，其子代数一定存在.

关于子代数的术语

(1) 最大的子代数：就是V本身

(2) 最小的子代数：如果令V中所有代数常数构成的集合是B，且B对V中所有的运算都是封闭的，则B就构成了V的最小的子代数

(3) 最大和最小的子代数称为V的平凡的子代数

(4) 若B是S的真子集，则B构成的子代数称为V的真子代数.

例 设V=<Z,+,0>,令 nZ={nz | z∈Z},n为自然数，则nZ是V的子代数

当n=1和0时，nZ是V的平凡的子代数，其他的都是V的非平凡的真子代数.

积代数

定义9.9 设V_1=<A,∘>和V_2=<B,$*$>是同类型的代数系统，∘和$*$为二元运算，在集合$A\times B$上如下定义二元运算▪，$\forall$<a_1,b_1>,<a_2,b_2>$\in A\times B$，有

$$<a_1,b_1>\blacksquare<a_2,b_2>=<a_1\circ a_2, b_1*b_2>$$

称V=<$A\times B$,▪ >为V_1与V_2的积代数，记作$V_1\times V_2$. 这时也称V_1和V_2为V的因子代数.

实例 Z_2={0,1}，V=<Z_2,⊕ >， $V_1\times V_2$=<$Z_2\times Z_2$,▪>

$Z_2\times Z_2$={<0,0>, <1,0>, <0,1>, <1,1>}

<0,1> ▪ <1,0>=<0,0>

注意：积代数的定义可以推广到具有多个运算的同类型的代数系统

积代数的性质

定理9.3 设V_1=<A,∘>和V_2=<B,∗>是同类型的代数系统,

$V_1 \times V_2$=<$A \times B$,▪>是它们的积代数.

(1) 如果∘ 和 ∗运算是可交换（可结合、幂等）的，那么▪运算也是可交换（可结合、幂等）的

(2) 如果 e_1 和 e_2（θ_1和θ_2）分别为∘ 和 ∗运算的单位元（零元），那么<e_1,e_2>（<θ_1,θ_2>）也是▪运算的单位元（零元）

(3) 如果 x 和 y 分别为∘和 ∗运算的可逆元素，那么<x,y>也是▪运算的可逆元素，其逆元就是<x^{-1},y^{-1}>