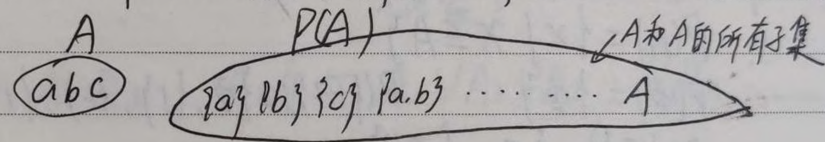
日期: /

第6章 集合代数

6.1 集合的基本概念

任意性: 集合元素可以是集合　　幂集 $A=\{a,b,c\}$

$P(A)$是A中元素构成的有序集合的集合

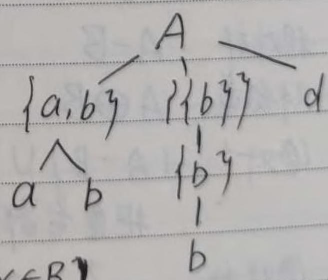


确定性: 确定元素是否集合元素

相异性:　　　　无序性:

集合的树型层次结构

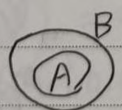
$A=\{\{a,b\},\{\{b\}\},d\}$



⇒ 树型结构

⇓

明确元素之间的关系



$A\subseteq B$

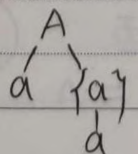
元素

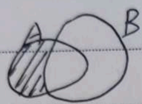
$\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)$

隶属关系和包含关系 ⇐ 子集合

元素 $\{a\}\in A$　　　$\{a\}\subseteq A$

$A=\{a,\{a\}\}$





$A\nsubseteq B$

$\exists x(x\in A\wedge x\notin B)$

Φ 空集

$\Phi=\{x\mid x\neq x\}$

$\Phi\subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x\in\Phi\rightarrow x\in A) \Leftrightarrow$ 恒真命题

Φ是唯一的

Φ_1, Φ_2 两个空集

$\Phi_1\subseteq\Phi_2$, $\Phi_2\subseteq\Phi_1$　　$\therefore \Phi_1=\Phi_2$

幂集: A的全体子集 ⇒ $P(A)$

$P(A)=\{x\mid x\subseteq A\}$

$P(\Phi)=\{\Phi\}$　　$P(\{1,2\})=\{\Phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

$P(\{\Phi\})=\{\Phi,\{\Phi\}\}$

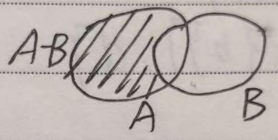
李莎

6.2 集合的运算

并 $A\cup B$

交 $A\cap B$

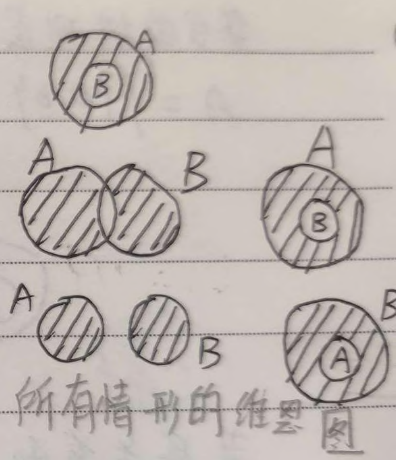
相对补 $A-B$



对称差 $A\oplus B$

$(A-B)\cup(B-A)$

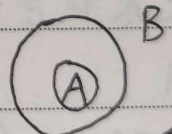
把重合部分减掉



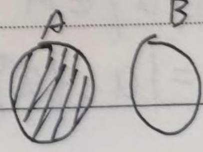
绝对补 $\sim A = E - A$

$\overline{A}$

$A\subseteq B \Longleftrightarrow A-B=\Phi$



$A\cap B=\Phi \Longleftrightarrow A-B=A$



[补充] $A\oplus\Phi=A$

$A\oplus A=\Phi$

广义运算

广义并 $\cup A=\{x \mid \exists z(z\in A \wedge x\in z)\}$

x属于A中的z元素

eg. $A=\{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\}\}$

$\therefore \cup A=\{1,2,3\}$

A

z元素 $\{1\}$ $\{1,2\}$ $\{1,2,3\}$

x元素 1 1 2 1 2 3

$\cup\{A_1, A_2, A_3 \cdots A_n\}=A_1\cup A_2\cup A_3\cdots\cup A_n$

广义交 $\cap A=\{x \mid \forall z(z\in A \rightarrow x\in z\}$

x属于A中每一个元素

eg. $\cap A=\{1\}$

$\cup A=\cup\{\{a\}\}=\{a\}$

$\cup B=\cup\{a\}=a$

$\cup C=\cup\{a,\{b,c\}\}=a\cup\{b,c\}$

无序、相异、确定、任意

$P(\emptyset)=\{\emptyset\}$

$P(\{\emptyset\})=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$

若A是n元集，则P(A)有 2^n 个元素.

幂集 $P(A)$ 设 $A=\{a,b,c\}$，$P(A)$ 是A中元素构成的所有集合的集合.

↳ $\emptyset$ $\{a\}$ $\{b\}$ ....

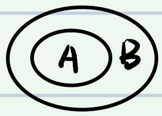
↓ 所有子集的集合

元素与集合的关系 ($\in$, $\notin$)

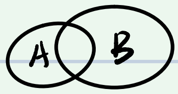
A是B的子集合，则 $A\subseteq B$

若 $A=\{a,\{a\}\}$，则 $\{a\}\in A$ 且 $\{a\}\subseteq A$

$A=B \Leftrightarrow A\subseteq B \wedge B\subseteq A$

$A\subseteq B$  $\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)$

$A\subset B \Leftrightarrow A\subseteq B \wedge A\neq B$

$A\nsubseteq B$  $\exists x(x\in A\wedge x\notin B)$

$A\nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x(x\in A\wedge x\notin B)$

→唯一

空集 $\emptyset=\{x\mid x\neq x\}$ 是任何集合的子集 $\emptyset\subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x\in\emptyset\rightarrow x\in A) \Leftrightarrow T$ (恒真命题)

全集E: 包含了所有集合的集合 (相对性)

集合的运算

并集 $A\cup B=\{x\mid x\in A\vee x\in B\}$

交集 $A\cap B=\{x\mid x\in A\wedge x\in B\}$

相对补集 $A-B=\{x\mid x\in A\wedge x\notin B\}$

对称差集 $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$

绝对补集 $\sim A=E-A$

n个集合的并/交

$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\{x\mid x\in A_1\vee x\in A_2\cdots\vee x\in A_n\}$

$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap_{i=1}^{n}A_i=\{x\mid x\in A_1\wedge x\in A_2\cdots\wedge x\in A_n\}$

广义并 $\cup A=\{x\mid \exists z(z\in A\wedge x\in z)\}$ A的元素的元素构成的集合.

王绮文

广义交 $\cap A=\{x\mid \forall z(z\in A\rightarrow x\in z)\}$ ($x\in A$中的每一个元素)

[例1] $A=\{\{a\},\{a,b\}\}$

(1) $\cup\cup A$ (2) $\cap\cap A$

$\cup A=\{a,b\}$ $\cap A=\{a\}$

$\cup\cup A=a\cup b$ $\cap\cap A=a$

(3) $\cap\cup A\cup(\cup\cup A-\cup\cap A)$

$\cap\{a,b\}\cup(\cup\{a,b\}-\cup\{a\})$

$=a\cap b\cup(a\cup b-a)$

$=a\cap b\cup(b-a)$

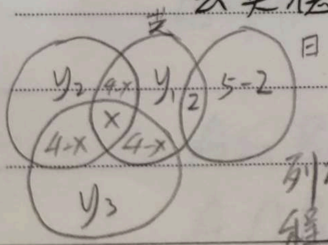
$=b$

6.3 有穷集的计数

1.文氏图

24人会外语 英 日 德 法 13, 5, 10, 9人, 英+日 2人

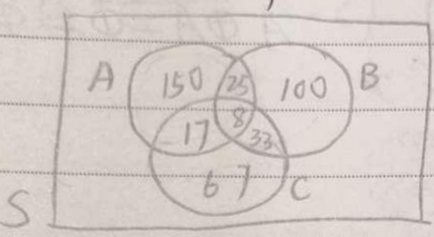
会英德法任两种 4人, 会日不会德法 求会1种 or 3种



列方程

$$\begin{cases} y_1+2(4-x)+x+2=13 \\ y_2+2(4-x)+x=9 \\ y_3+2(4-x)+x=10 \\ y_1+y_2+y_3+3(4-x)+x=19 \end{cases}$$

[例2] 1到1000之间 不能被5,6,8整除



$S-(A\cup B\cup C)$

$S=\{x\mid x\in Z\wedge 1\le x\le 1000\}$

$A=\{x\mid x\in S\wedge x$被5整除$\}$

$B=\{x\mid x\in S\wedge x$被6整除$\}$

$C=\{$ 8 $\}$

$|A\cap B\cap C|=|$被5,6,8整除的数$|=\left[\frac{1000}{120}\right]=8$ 取整

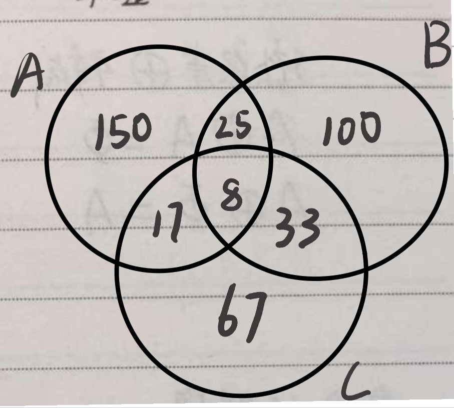
$lcm(5,6,8)=120$

最小公倍数

$|A\cap B|=\left[\frac{1000}{lcm(5,6)}\right]=33$

$|A\cap C|=\left[\frac{1000}{lcm(5,8)}\right]=25$

$|B\cap C|=\left[\frac{1000}{lcm(6,8)}\right]=41$



eg: $\cup\{\{a\}\}=\{a\}$ $\qquad$ $\cup\{a\}=a$

性质

① $\cup\varnothing=\varnothing$, $\cap\varnothing$ 无意义 ② 减少集合层次 ③ 可转变为初级运算 ④ $\cup\{x\}=x$ $\quad \cap\{x\}=x$

包含排斥原理

$$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\cdots\cap\bar{A}_n|=|S|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|-\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^n|A_1\cap\cdots\cap A_n|$$

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|+\cdots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|$$

18. $A=\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\{\varnothing\}\}$

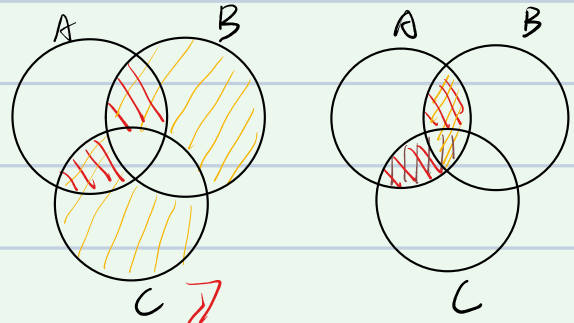
$\cup A=\{1,2,3,\varnothing\}$ $\quad \cap A=\{\varnothing\}$ $\quad \cap\cup A=\varnothing$ ($\to 1\cap 2\cap 3\cap\varnothing$) $\quad \cup\cap A=\varnothing$

(任何集合都包含空集)

5. (1) $\varnothing\subseteq\varnothing$ ✓ $\quad$ (2) $\varnothing\in\varnothing$ $\quad$ (3) $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$ ✓ $\quad$ (4) $\varnothing\in\{\varnothing\}$ ✓

8. (3) $\{\varnothing\}$ $\quad$ (4) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ $\quad$ $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$



6.4 集合恒等式

集合恒等式

交换律 $A\cup B=B\cup A$ $\qquad A\cap B=B\cap A$ $\qquad A\oplus B=B\oplus A$

结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ $\qquad (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ $\qquad (A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$

幂等律 $A\cup A=A$ $\qquad A\cap A=A$ $\qquad A\oplus A=\varnothing$ $\quad A\oplus\varnothing=A$

分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $\qquad A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ $\qquad A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$

吸收律 $A\cup(A\cap B)=A$ $\qquad A\cap(A\cup B)=A$

德摩根(D.M)律 $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ $\qquad A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$ $\qquad \sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$

$\sim\varnothing=E$ $\qquad \sim E=\varnothing$

双重否定律 $\sim\sim A=A$

同一律 $A\cup\varnothing=A$ $\qquad A\cap E=A$

零律 $A\cup E=E$ $\qquad A\cap\varnothing=\varnothing$

排中律 $A\cup\sim A=E$ 矛盾律 $A\cap\sim A=\phi$

命题演算法

eg: 证 $A\cup(A\cap B)=A$.

证明. 任取x, $x\in A\cup(A\cap B)\Leftrightarrow x\in A\vee x\in A\cap B$

$\Leftrightarrow x\in A\vee(x\in A\wedge x\in B)\Leftrightarrow x\in A$

$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$.

证明: 任取x, $x\in A-(B\cup C)\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in\sim(B\cup C)\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in\sim B\cap\sim C$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in\sim B\wedge x\in\sim C\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in\sim B\wedge x\in A\wedge x\in\sim C$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\wedge x\in A\wedge x\notin C\Leftrightarrow x\in(A-B)\wedge x\in(A-C)$

$\Leftrightarrow x\in(A-B)\cap(A-C)$

等式代入法

证 $A\cup(A\cap B)=(A\cap E)\cup(A\cap B)=A\cap(E\cup B)=A\cap E=A$

$A-(B\cup C)=A\cap\sim(B\cup C)=A\cap(\sim B\cup\sim C)=(A\cap\sim B)\cup(A\cap\sim C)$

$=(A-B)\cup(A-C)$

$\overset{①}{A\cup B=B}\Leftrightarrow\overset{②}{A\subseteq B}\Leftrightarrow\overset{③}{A\cap B=A}\Leftrightarrow\overset{④}{A-B=\phi}$

①⇒②

$\forall x$, $x\in A\Rightarrow x\in A\vee x\in B\Rightarrow x\in A\cup B\Rightarrow x\in B$

②⇒③

$A\cap B\subseteq A$成立. 则证$A\subseteq A\cap B$

$x\in A\Rightarrow x\in A\wedge x\in A\xRightarrow{(A\subseteq B)} x\in A\wedge x\in B\Rightarrow x\in A\cap B$

③⇒④

$A-B=A\cap\sim B=(A\cap B)\cap\sim B=A\cap(B\cap\sim B)=A\cap\phi=\phi$.

④⇒①

$A\cup B=B\cup(A-B)=B\cup\phi=B$.

$\overset{①}{A\subseteq B}\Rightarrow\overset{②}{\sim B\subseteq\sim A}\Rightarrow\overset{③}{\sim A\cup B=E}\Rightarrow\overset{④}{A-B\subseteq B}$

①⇒②

$\forall x$, $x\in\sim B\Rightarrow x\notin B\Rightarrow x\notin A\Rightarrow x\in\sim A$, 则$\sim B\subseteq\sim A$.

②⇒③ $\sim A\cup B\subseteq E$, 证$E\subseteq\sim A\cup B$

$x\in E\Rightarrow x\in\sim B\cup B\xRightarrow{(\sim B\subseteq\sim A)} x\in\sim A\cup B$ 则$E\subseteq\sim A\cup B$

③⇒④

$(x\in\sim A\cup B\leftrightarrow x\in E)\Rightarrow\forall x(x\in A\cap\sim B\leftrightarrow x\in\phi)\Rightarrow\forall x(x\in A-B\leftrightarrow x\in\phi)$ 则$A-B=\phi\subseteq B$

④ $\Rightarrow$ ①

$A = (A-B) \cup (A \cap B)$

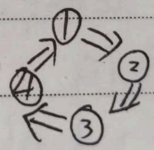
$x \in A \Rightarrow x \in (A-B) \cup (A \cap B) \Rightarrow x \in B \cup B \Rightarrow x \in B$

$A \oplus B = A \oplus C$ 证 $B = C$

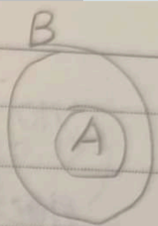
集合的证明 { 命题演算法
等式代入法

包含等价条件的证明

证明思路 { ① $\Leftrightarrow$ ②
① $\Leftrightarrow$ ③
① $\Leftrightarrow$ ④



P35



证明: $A \subseteq B$ ① $\sim B \subseteq \sim A$ ② $\sim A \cup B = E$ ③ $A - B \subseteq B$ ④

① $\Rightarrow$ ② p q 逆否命题 $\neg q \rightarrow \neg p$

$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \Leftrightarrow \forall x(x \notin B \rightarrow x \notin A)$

$\Leftrightarrow \forall x(x \in \sim B \rightarrow x \in \sim A) \Leftrightarrow \sim B \subseteq \sim A$

② $\Rightarrow$ ③ $\sim A \cup B \subseteq E$ 显然 $\Rightarrow$ 证 $E \subseteq \sim A \cup B$

$\sim A \cup B \supseteq \sim B \cup B = E$ $x \in E \Rightarrow x \in \sim B \cup B \Rightarrow x \in \sim A \cup B$

③ $\Rightarrow$ ④

$\forall x(x \in \sim A \cup B \leftrightarrow x \in E)$

$\Rightarrow \forall x(x \notin \sim A \cup B \leftrightarrow x \notin E)$

$\Rightarrow \forall x(x \in A \cap \sim B \leftrightarrow x \in \sim E)$

$\Rightarrow \forall x(x \in A - B \leftrightarrow x \in \Phi)$

$\therefore A - B = \Phi \subseteq B$

④ $\Rightarrow$ ①

$A = (A-B) \cup (A \cap B)$

$\forall x \quad x \in A \Rightarrow x \in (A-B) \cup (A \cap B) \Rightarrow x \in B \cup B \Rightarrow x \in B$

第七章 二元关系

§ 二元关系——类特殊的集合　$A\times B=\{\langle x,y\rangle \mid x\in A \wedge y\in B\}$ *

笛卡儿积的性质　因为有序对相等的充要条件 $\langle x,y\rangle, \langle u,v\rangle \Leftrightarrow x=u, y=v$

(1) 不适合交换律 $A\times B\neq B\times A$ $(A\neq B, A\neq\phi, B\neq\phi)$

(2) 不适合结合律 $(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$ $(A\neq\phi, B\neq\phi, C\neq\phi)$

(3) 对于并或交（$\vee$或$\wedge$）满足分配律　$A\times\phi=\phi$，$\phi\times A=\phi$

$A\times(B\vee C)=(A\times B)\vee(A\times C)$　　$A\times(B\wedge C)=A\times B\wedge A\times C$

$(B\vee C)\times A=(B\times A)\vee(C\times A)$　　$(B\wedge C)\times A=B\times A\wedge C\times A$

(4) $A\times\phi=\phi\times B=\phi$

(5) 若 $|A|=m$，$|B|=n$，则 $|A\times B|=mn$.

证明 $A\times(B\vee C)=(A\times B)\vee(A\times C)$

$A\times(B\vee C)=\{\langle x,y\rangle \mid x\in A\wedge y\in B\vee C\}$　$\langle x,y\rangle\in A\times(B\vee C)$

$=\{\langle x,y\rangle \mid x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)\}$　$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\vee C$

$=\{\langle x,y\rangle \mid (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)\}$

$=\{\langle x,y\rangle \mid x\in A\wedge y\in B\}\vee\{\langle x,y\rangle \mid x\in A\wedge y\in C\}$

$=(A\times B)\vee(A\times C)$

[例2] (1) 证明：$A\times C=\{\langle x,y\rangle \mid x\in A\wedge y\in C\}$

$A=B$　$\forall x\in A\Leftrightarrow x\in B$

$\forall x\in C\Leftrightarrow x\in D$

若 $A=B$，$C=D$，则 $A\times C=B\times D$ 但反之不成立

$A\times\phi=\phi$　$\phi\times A=\phi$

关系：(1) 集合非空，元素都是有序对.

(2) 集合是空集

关系——类特殊的集合

$A=B$，A上的关系 J

$E_A=\{\langle x,y\rangle \mid x\in A\wedge y\in A\}=A\times A$. 全域关系

$I_A=\{\langle x,x\rangle \mid x\in A\}$ 恒等关系 $/\langle x,y\rangle \mid x=y\wedge x\in A$

$A\times B$ 笛卡尔积

$A\times B=\{\langle x,y\rangle \mid x\in A\wedge y\in B\}$

$|A|=m$ $|B|=n$ $|A\times B|=mn$

$L_A=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A, x\leq y\}$ 小于等于关系

$D_A=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A, x|y\}$ 整除关系 x是y的因子

$R_\subseteq=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A, x\subseteq y\}$ 真子集，可以包含自己

对于任何集合A，空集ϕ是$A\times A$的子集，称作A上的空关系.

[例] $A=\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$

$R_\subseteq=\{\langle\phi,\{a\}\rangle, \langle\phi,\{b\}\rangle, \langle\phi,\{a,b\}\rangle, \langle\{a\},\{a,b\}\rangle, \langle\{b\},\{a,b\}\rangle,$
$\langle\{a\},\{a\}\rangle, \langle\{b\},\{b\}\rangle, \langle\{a,b\},\{a,b\}\rangle\}$

熊宇凡

7种　　　　　7.3 关系的运算　　　　　刘润润

一、设R是二元关系

(1) R中所有有序对的第一元素构成的集合 称作R的定义域　$domR$

$domR=\{x \mid \exists y(<x,y>\in R)\}$

(2) 　　第二元素　　值域　$ranR$

$ranR=\{y \mid \exists x(<x,y>\in R)\}$

(3)

$fld R = domR \cup ranR$.

(4) R的逆关系 R的逆　R^{-1}　$R^{-1}=\{<x,y> \mid <y,x>\in R\}$

(5) F, G为二元关系、G对F的右复合 记作 $F\circ G$ 其中

$F\circ G=\{<x,y> \mid \exists t(<x,t>\in F \wedge <t,y>\in G)\}$

左复合 $F\circ G=\{<x,y> \mid \exists t(<x,t>\in G \wedge <t,y>\in F)\}$

R为二元关系. A是集合

1) R在A上的限制　$R\restriction A=\{<x,y> \mid xRy \wedge x\in A\}$

2) A在R下的像　$R[A]=ran(R\restriction A)$

R在A上的限制$R\restriction A$是R的子关系，而A在R下的像$R[A]$是$ranR$的子集

- $(F^{-1})^{-1}=F$
- $domF^{-1}=ranF$　$ranF^{-1}=domF$

证: $\forall <x,y>\in (F^{-1})^{-1} \Leftrightarrow <y,x>\in F^{-1} \Leftrightarrow \exists y(<y,x>\in F) \Leftrightarrow x\in ranF$

故 $domF^{-1}=ranF$.

- 设F, G, H是任意关系　则$(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$

$(F\circ G)^{-1}=G^{-1}\circ F^{-1}$.

证:

$\forall <x,y>\in (F\circ G)\circ H$

$\Leftrightarrow \exists t(<x,t>\in F\circ G \wedge <t,y>\in H)$

$\Leftrightarrow \exists t(\exists s(<x,s>\in F \wedge <s,t>\in G) \wedge <t,y>\in H)$

$\Leftrightarrow \exists t \exists s(<x,s>\in F \wedge <s,t>\in G \wedge <t,y>\in H)$

$\Leftrightarrow \exists s(<x,s>\in F \wedge \exists t(<s,t>\in G \wedge <t,y>\in H))$

$\Leftrightarrow \exists s(<x,s>\in F \wedge <s,y>\in G\circ H)$

$\Leftrightarrow <x,y>\in F\circ(G\circ H)$

关系的运算

• 设R为A上的关系

$R \circ I_A = I_A \circ R = R$.

证：$\forall \langle x,y\rangle \in R \circ I_A$

$\Leftrightarrow \exists t\,(\langle x,t\rangle \in R \land \langle t,y\rangle \in I_A)$

$\Leftrightarrow \exists t\,(\langle x,t\rangle \in R \land t=y)$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle \in R$.

$\langle x,y\rangle \in R$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle \in R \land y \in A$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle \in R \land \langle y,y\rangle \in I_A$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle \in R \circ I_A$

• $F\restriction(A\cup B) = F\restriction A \cup F\restriction B$

证：$\forall \langle x,y\rangle \in F\restriction(A\cup B)$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in F \land (x \in A\cup B)$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in F \land (x\in A \lor x\in B)$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in F \land (x\in A) \lor \langle x,y\rangle \in F \land x\in B$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in F\restriction A \lor \langle x,y\rangle \in F\restriction B$

$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in F\restriction A \cup F\restriction B$

定理1. $(F^{-1})^{-1}=F$

$\mathrm{dom}\,F^{-1} = \mathrm{ran}\,F \quad \mathrm{ran}\,F^{-1} = \mathrm{dom}\,F$

定理2. F.G.H是∀的关系、则$(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

$(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$

定理3. $R\circ I_A = I_A \circ R = R$

定理4. F.G.H是∀关系.

$F\circ(G\cup H) = F\circ G \cup F\circ H$

$(G\cup H)\circ F = G\circ F \cup H\circ F$

$F\circ(G\cap H) \subseteq F\circ G \cap F\circ H$

$(G\cap H)\circ F \subseteq G\circ F \cap H\circ F$

定理5. F为关系、A.B为集合

(1) $F\restriction(A\cup B) = F\restriction A \cup F\restriction B$

(2) $F[A\cup B] = F[A] \cup F[B]$

(3) $F\restriction(A\cap B) = F\restriction A \cap F\restriction B$

(4) $F[A\cap B] \subseteq F[A] \cap F[B]$

证明 $(G\cup H)\circ F = G\circ F \cup H\circ F$

$\forall \langle x,y\rangle \in (G\cup H)\circ F$

$\Leftrightarrow \exists t(\langle x,t\rangle \in (G\cup H) \wedge \langle t,y\rangle \in F)$

$\Leftrightarrow \exists t((\langle x,t\rangle \in G \vee \langle x,t\rangle \in H) \wedge \langle t,y\rangle \in F)$

$\Leftrightarrow \exists t(\langle x,t\rangle \in G \wedge \langle t,y\rangle \in F) \vee (\langle x,t\rangle \in H \wedge \langle t,y\rangle \in F)$

$\Leftrightarrow \exists t(\langle x,y\rangle \in G\circ F) \vee (\langle x,y\rangle \in H\circ F)$

$\Leftrightarrow \exists t \langle x,y\rangle \in G\circ F \cup H\circ F$.

即 $(G\cup F)\circ F = G\circ F \cup H\circ F$

证: $F[A\cap B] \subseteq F[A] \cap F[B]$

$\forall y$ 有 $y \in F[A\cap B]$

$\Leftrightarrow \exists x(\langle x,y\rangle \in F \wedge x \in A\cap B)$

$\Leftrightarrow \exists x(\langle x,y\rangle \in F \wedge x \in A \wedge x \in B)$

$\Leftrightarrow \exists x((\langle x,y\rangle \in F \wedge x \in A) \wedge (\langle x,y\rangle \in F \wedge x \in B))$

$\Rightarrow \exists x(\langle x,y\rangle \in F \wedge x \in A) \wedge \exists x(\langle x,y\rangle \in F \wedge x \in B)$

$\Leftrightarrow \exists y \in F[A] \wedge y \in F[B]$

$\Leftrightarrow y \in F[A] \cap F[B]$

定义: 设R为A上的关系, n为自然数 则R的n次幂定义为

$R^0 = \{\langle x,x\rangle \mid x \in A\} = I_A$.

$R^{n+1} = R^n \circ R$.

故. 对A上的$\forall R_1, R_2$ 都有 $R_1^0 = R_2^0 = I_A$

- 第一个矩阵的第i行 第二个矩阵的第j列 对应积乘之和

$$\begin{cases} R^m \circ R^n = R^{m+n} \\ (R^m)^n = R^{mn} \end{cases} \qquad R^m \circ R^0 = R^m \circ I_A = R^m = R^{m+0}$$

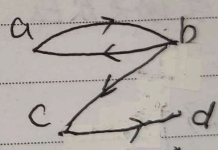
定理6. 设A为n元集 R是A上的关系 则存在自然数s和t.
使得 $R^s = R^t$

定理7. 设R为A上的关系 $m,n \in N$.
$R^m \circ R^n = R^{m+n}$ $\quad (R^m)^n = R^{mn}$

[例] $A=\{a,b,c,d\}$ $R=\{\langle a,b\rangle \langle b,a\rangle \langle b,c\rangle \langle c,d\rangle\}$

求R的n次幂，分别用矩阵和关系图表示

R的关系矩阵 $M=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$



R^2 ⇑ 2级跳

$R^2=R\circ R=\{\langle a,a\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,b\rangle\langle b,d\rangle\}$

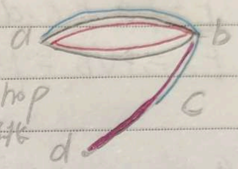
$M^2=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

⇓ 矩阵乘法

$=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

2hop

2跳



邻阶矩阵

$R^0\ R\ R^2\ R^3\ R^4 \cdots\ R^n$ ⇒ 到后面相等 $R^2=R^4=R^6=\cdots$

$I\ M\ M^2\ M^3\ M^4 \cdots\ M^n$

全域矩阵 $R=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$ $R^2=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$

将大于1的数化为1

定理：$\exists s,t \quad R^s=R^t$

$R^m\circ R^n=R^{m+n}$

$(R^m)^n=R^{mn}$

刘润润

定理8 设R为A上的关系，若存在自然数s,t $(s<t)$ 使得 $R^s=R^t$

则：1) 对 $\forall k\in N$ 有 $R^{s+k}=R^{t+k}$

2) 对 $\forall k,i\in N$ 有 $R^{s+kp+i}=R^{s+i}$ 其中 $p=t-s$

~~s+kt-ks+i=s+i~~

3) 令 $S=\{R^0,R^1,\cdots R^{t-1}\}$ 则对于 $\forall$ 的 $q\in N$ 有 $R^q\in S$.

7.4 关系的性质

1.自反性 2.反自反性 3.对称性 4.反对称性 5.传递性

- 设R为A上的关系

1) 若 $\forall x(x\in A\to\langle x,x\rangle\in R)$ 自反的（称R在A上是）

2) 若 $\forall x(x\in A\to\langle x,x\rangle\notin R)$ 反……

- A上的全域关系 E_A 恒等关系 I_A 都是A上的自反关系
- 小于等于关系 L_A 整除关系 D_B 分别为A和B上的自反关系
- 包含关系 $R_\subseteq$ 是给定集合族A上的自反关系

3) $\forall x\forall y(x,y\in A\land\langle x,y\rangle\in R\to\langle y,x\rangle\in R)$ 对称

4) 若 $\forall x\forall y(x,y\in A\land\langle x,y\rangle\in R\land\langle y,x\rangle\in R\to x=y)$ 反对称

5) 若 $\forall x\forall y\forall z(x,y,z\in A\land\langle x,y\rangle\in R\land\langle y,z\rangle\in R\to\langle x,z\rangle\in R)$

P_{125} 表格 联系性质·集合表达式·关系矩阵·关系图

- "√" "×" 表示能保持和"不一定能保持"

运算	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
		原有性质			
R^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1\cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1\cup R_2$	√	√	√	×	×
R_1-R_2	×	√	√	√	×
$R_1\circ R_2$	√	×	×	×	×

7.5 关系的闭包

R的自反(对称/传递)闭包是A上的关系R'

(1) R'是自反(对称/传递)

(2) $R \subseteq R'$

(3) 对A上任何包含R的自反(对称/传递)关系R''有$R' \subseteq R''$

自反、对称、传递 闭包

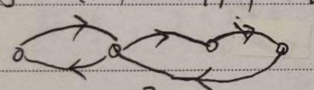
$r(R) = R \cup R^0$

$s(R) = R \cup R^{-1}$

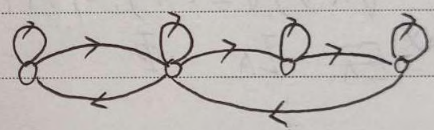
$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$ n 阶

[例] $A=\{a,b,c,d\}$ $R=\{<a,b> <b,a> <b,c> <c,d> <d,b>\}$

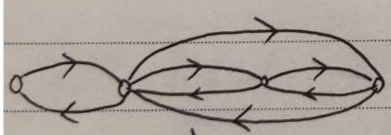
求 $r(R)$ $s(R)$ $t(R)$



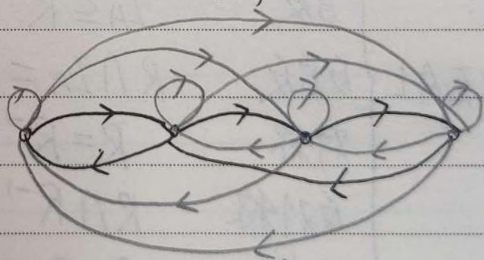
R



r(R)



s(R)



t(R)

熊宇凡

等价关系：设R为非空集合A上的关系。如果R是自反的，对称的，传递的，则称R为A上的等价关系 $x\sim y$ (xRy)

偏序关系：设R为非空集合A上的关系，如果R是自反的，反对称的，传递的，则称R为A上的偏序关系 $x\preceq y$ ($<x,y>\in\preceq$，读作x"小于等于"y)

等价关系图：被分为n个(有几个)部分，每部分中的数两两都有关系，不同部分中的数则没有关系。每一部分中所有的顶点构成一个等价类。

商集：设R为非空集合A上的等价关系，以R的所有等价类作为元素的集合称为A关于R的商集 A/R

$A/R=\{[x]_R \mid x\in A\}$ 等价类也是一个集合

eg. 设 $A=\{1,2,3,\ldots,8\}$，A关于模3等价关系R的商集为

$A/R=\{\{1,4,7\},\{2,5,8\},\{3,6\}\}$

A与恒等关系商集 $A/I_A=\{\{1\},\{2\},\ldots,\{8\}\}$

$A/E_A=\{\{1,2,\ldots,8\}\}$

划分：(1) $\phi\notin\pi$ (2) $\forall x\forall y(x,y\in\pi\wedge x\neq y\rightarrow x\cap y=\phi)$

(3) $\cup\pi=A$

则称π是A的一个划分，称π中的元素为A的划分块

商集就是A的一个划分

等价划分和划分

[例2] 给出 $A=\{1,2,3\}$ 上所有的等价关系

先做出A的所有划分，然后根据划分写出对应的等价关系

$\pi_1=\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ I_A $\pi_2=\{\{1,2,3\}\}$ E_A

$\pi_3=\{\{1,2\},\{3\}\}$ $\pi_4=\{\{1,3\},\{2\}\}$

$\pi_5=\{\{1\},\{2,3\}\}$

故 $R_1=\pi_3=\{<1,2>,<2,1>\}\cup I_A$

$R_2=\{<1,3>,<3,1>\}\cup I_A$

$R_3=\{<2,3>,<3,2>\}\cup I_A$

自反　反自反　$\langle x,x\rangle$

对称　反对称　$\langle x,y\rangle \mid \langle y,x\rangle$

传递　$\langle x,y\rangle$　$\langle y,z\rangle \mid \langle x,z\rangle$

7.6 等价关系与划分

等价关系R ⇐ 自反　对称　传递

同余 $R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A \wedge \underline{x=y \bmod (3)}\}$

$x\%3=y\%3$

$1=4 \bmod (3)$　$2=5 \bmod (3)$

$1=7 \bmod (3)$　$2=8 \bmod (3)$

$4=7 \bmod (3)$　$5=8 \bmod (3)$

$1=1 \bmod (3)$

1R4　2R5

1R7　2R8

4R7　5R8

1R1

R

$\langle 1,4\rangle$　$\langle 2,5\rangle$

$\langle 1,7\rangle$　$\langle 2,8\rangle$

$\langle 4,7\rangle$　$\langle 5,8\rangle$

$\langle 1,1\rangle$　自反　对称　传递

自反：$x=x \bmod (3)$

对称：$x=y \bmod (3)$，$y=x \bmod (3)$

传递：$x=y \bmod (3)$，$y=z \bmod (3)$ → $x=z \bmod (3)$

偏序关系R　自反　反对称　传递

$R=D_A$　$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

整除关系　R $\langle 1,1\rangle$ $\langle 2,4\rangle$ $\langle 2,6\rangle$ $\langle 2,8\rangle$ $\langle 3,3\rangle$ $\langle 3,6\rangle$ $\langle 3,9\rangle$ $\langle 4,4\rangle$ $\langle 4,8\rangle$ $\langle 5,5\rangle$ $\langle 6,6\rangle$ $\langle 7,7\rangle$ $\langle 8,8\rangle$ $\langle 9,9\rangle$

自反　$x \mid\mid x$

反自反　$x \mid\mid y$

传递　$x \mid\mid y$　$y \mid\mid z$

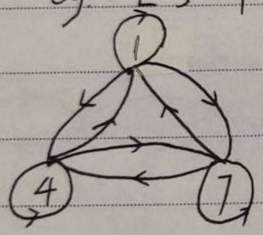
$x \mid\mid z$

等价关系　R是自反、对称、传递　R是A上的等价关系

$\langle x,y\rangle \in R$　x等价于y　$x \sim y$

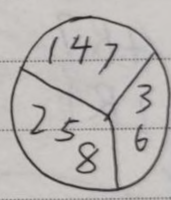
等价类　$[i] = \{nz+i \mid z \in Z\}$ $i=0,1,\cdots n-1$

eg. $[1] = \{1,4,7\} = T$



$A = \{\underbrace{147}_{[1]}\ \underbrace{258}_{[2]}\ \underbrace{36}_{[3]}\}$

$1 \sim 4$　$[1]=[4]$



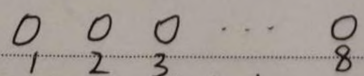
商集　等价类的集合　A关于R的商集

$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$

eg. $A/R = \{\{1,4,7\},\{2,5,8\},\{3,6\}\}$

A关于恒等关系和全域关系的集合为 → 全域关系为一整块

$R_2 = I = \{\langle 1,1\rangle \langle 2,2\rangle \langle 3,3\rangle \cdots\cdots \langle 8,8\rangle\}$

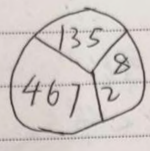


$R_2/R = \{\{1\},\{2\},\{3\}\cdots\cdots\{8\}\}$

划分　$\cup \pi = A$

⇓

利用等价关系R把A中元素进行划分



$R = \{\langle 1,1\rangle \langle 3,3\rangle \langle 5,5\rangle, \langle 1,3\rangle \langle 1,5\rangle \cdots\cdots\}$

7.7 偏序关系

偏序关系 $\leqslant$　$\langle x,y\rangle \in \leqslant$　记作 $x \leqslant y$

eg. 恒等关系是偏序关系

小于或等于，整除，包含

(1) $\forall x,y \in A$，x y可比　$R = L_A \leqslant$　A = R(实数域)

⇕

$\langle x,y\rangle \in L_A \vee \langle y,x\rangle \in L_A$　$x \leqslant y$

(2) x，y不可比

偏序关系 自反 反对称，传递性

(1) 可比 $\Leftrightarrow x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$

指的是一种具体的偏序关系

(2) 定义2.20：设≼是A上偏序关系，称<A, ≼>为偏序集

若x≼y（或y≼x），x≠y，则称x与y是可比的.

(3) 覆盖：设R为非空集合A上的偏序关系，x, y∈A，如果x≺y且不存在z∈A使得x≺z≺y，则称y覆盖x

哈斯图：

(1) 每个结点没有环

(2) 两个连通的结点之间的序关系通过结点位置高低表示，位置低的元素画在下方（对x, y∈A，若x≺y，则x画在下面）

(3) 具有覆盖关系的两个结点之间连边

题型一：偏序集→哈斯图

[例 哈斯图] 哈斯图不画I_A，但偏序集要有I_A.

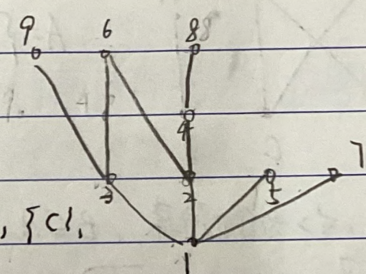
偏序集<{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, R整除>

1≺2　1≺3　1≺4　1≺5　1≺6　1≺7　1≺8　1≺9

2≺4　2≺6　2≺8　　先用"≺"关系来判断点的位置

3≺6　3≺9

4≺8



偏序集<P({a,b,c}), R⊆>的哈斯图

P({a,b,c}) = {φ, {a,b,c}, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {b,c}, {a,c}}

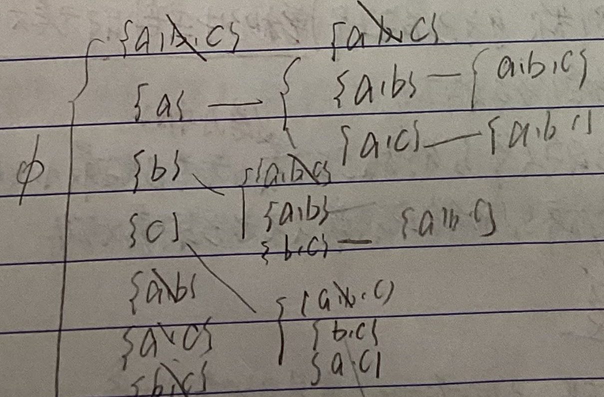
φ≺{a,b,c}　φ≺{a}，φ≺{b}　φ≺{c}，φ≺{a,b}　φ≺{b,c}，φ≺{a,c}

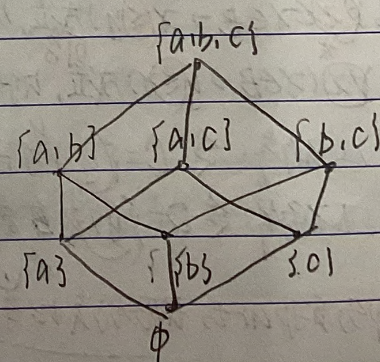
{a}≺{a,b,c}　{a}≺{a,b}　{a}≺{a,c}

{b}≺{a,b,c}　{b}≺{a,b}　{b}≺{b,c}

{c}≺{a,b,c}　{c}≺{a,c}.　{c}≺{b,c}

{a,b}≺{a,b,c}　{b,c}≺{a,b,c}　{a,c}≺{a,b,c}

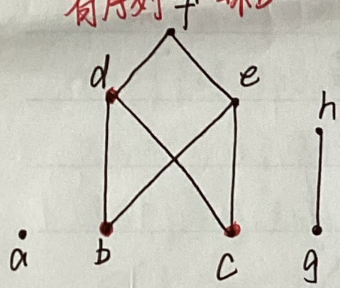




题型二：哈斯图→偏序集 →一定要带上 I_A + 极大极小元素点

[例12] 已知偏序集 $<A,R>$ 的哈斯图如右图所示，试求出集合A 元素的集合 和关系R的表达式。若 $B=\{b,c,d\}$

有序列的集合



$R = \{<b,d>,<b,f>,<b,e>,<e,f>,<d,f>,$
$<c,d>,<c,f>,<c,e>,<g,h>\} \cup I_A$ 可导

$A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$

B上界 d, f

B的最小上界 d

极大元：a, f, h

极小元：a, b, c, g

孤立点

B的下界和最大下界都不存在

设 $<A,\preccurlyeq>$ 为偏序集，$B\subseteq A$，$y\in B$.

最大元：若 $\forall x(x\in B \rightarrow \boxed{x\preccurlyeq y})$ 则称y为B的最大元

最小元：若 $\forall x(x\in B \rightarrow y\preccurlyeq x)$ 则称为y为B的最小元

极大元：若 $\forall x(x\in B \wedge \boxed{y\preccurlyeq x} \rightarrow x=y)$ 成立，则称y为B的极大元. x没有比y大的，y是前面的 y-样的

极小元：若 $\forall x(x\in B \wedge x\preccurlyeq y \rightarrow x=y)$ 成立，则称y为B的极小元. x没有比y小的，y是后面的 y-样的

哈斯图中的孤立点，既是极小元，也是极大元.

若 $<A,\preccurlyeq>$ 为偏序集，$B\subseteq A$　$y\in A$.

上界：若 $\forall x(x\in B \rightarrow x\preccurlyeq y)$ 成立，则称 y为B的上界　可导　即全部的元素内要有关系 要比B中全部的元素大

在A中，下界：若 $\forall x(x\in B \rightarrow y\preccurlyeq x)$ 成立，则称y为B的下界

y是A中的

对于B来说概念　最小上界/上确界：令 $C=\{y \mid y$ 为B的上界$\}$，则称C的最小元为B的最小上界

最大下界/下确界：令 $D=\{y \mid y$ 为B的下界$\}$，则称D的最大元为B的最大下界

不是一个部分的part，既无法比较

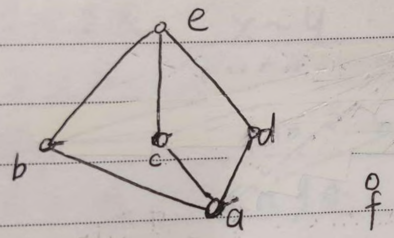
$(B\subseteq A, y\in A)$ B的最小元一定是B的最大下界，B的最大元一定是B的最小上界

下界，上界，上确界，下确界不一定存在

画出偏序集 $\langle A,\le\rangle$ 的哈斯图，找出A极大元 极小元，最大元 最小元

(1) $A=\{a,b,c,d,e,f\}$

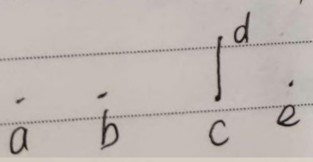
(2) $\le=\{\langle a,d\rangle\ \langle a,c\rangle\ \langle a,b\rangle\ \langle a,e\rangle\ \langle b,e\rangle\ \langle c,e\rangle\ \langle d,e\rangle\}\cup I_A$



~~无极大元~~ 最大元 ef

~~无极小元~~ 最小元 af

$A=\{a,b,c,d,e\}$ $\le=\{\langle c,d\rangle\}\cup I_A$



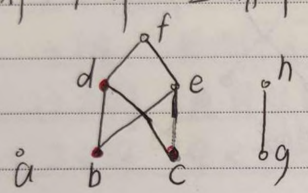
最大元 最小元不存在

极大元 d a b e

极小元 c a b e

[例] 偏序集 $\langle A,\le\rangle$，A 极大/小元 最大/小元 $B=\{b,c,d\}$

上界 下界 上确界 下确界



无最大元，最小元

极小元 a b c g

极大元 a f h

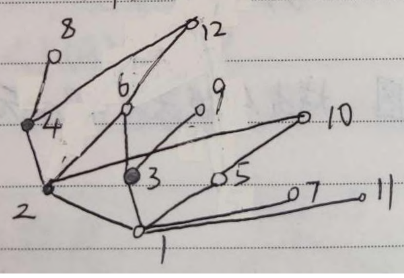
上界 d, f 最小上界 d

无下界和最大下界

[例] $A=\{1,2,\cdots 12\}$ $B=\{2,3,4\}$ $\le$ 为整除关系

$\langle A,\le\rangle$

哈斯图



B的上界 $\{12\}$

下界 $\{1\}$

$1\le \begin{matrix}2\\3\\4\end{matrix} \le 12$